

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$ και συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 15

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μίας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι: $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

γ) Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις $x = x_2 + x_1$ και $y = y_2 + y_1$.

δ) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι διανύσματα του επιπέδου τότε ισχύει πάντα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$.

ε) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(ε)

ΘΕΜΑ Β

Έστω δύο κυκλικά ρολόγια τοίχου με δείκτες. Το πρώτο βρίσκεται στην Αθήνα και το δεύτερο στο Λονδίνο. Τα ρολόγια λειτουργούν άψογα και δείχνουν την ώρα στην Αθήνα και στο Λονδίνο αντίστοιχα. Το ρολόι που βρίσκεται στην Αθήνα έχει λεπτοδείκτη μήκους 4cm και ωροδείκτη μήκους 3cm. Το ρολόι που βρίσκεται στο Λονδίνο έχει λεπτοδείκτη μήκους 8cm. Θεωρούμε το λεπτοδείκτη και τον ωροδείκτη του ρολογιού που βρίσκεται στην Αθήνα ως διανύσματα $\vec{\lambda}_A, \vec{\omega}_A$ αντιστοίχως, με κοινή αρχή το κέντρο του ρολογιού. Αναλόγως $\vec{\lambda}_L, \vec{\omega}_L$ είναι τα διανύσματα του λεπτοδείκτη και του ωροδείκτη αντιστοίχως, του ρολογιού που βρίσκεται στο Λονδίνο, με κοινή αρχή το κέντρο του ρολογιού.

B1. Να βρείτε την τιμή του εσωτερικού γινομένου $\vec{\lambda}_A \cdot \vec{\omega}_A$:

i) Όταν η ώρα στην Αθήνα είναι 06:00 π.μ.

Μονάδες 6

ii) Κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση του πέρατος του $\vec{\lambda}_A$ από το πέρας του $\vec{\omega}_A$ είναι 5cm.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το μήκος του ωροδείκτη του ρολογιού που βρίσκεται στο Λονδίνο αν στις 04:00π.μ. ώρα Αθήνας, ο λόγος του εσωτερικού γινομένου των δεικτών του ρολογιού που βρίσκεται στο Λονδίνο προς το εσωτερικό γινόμενο των δεικτών του ρολογιού που βρίσκεται στην Αθήνα, είναι ίσος με -4 .

Μονάδες 12

Δίνεται ότι η ώρα στο Λονδίνο είναι δύο ώρες ακριβώς πίσω από την ώρα στην Αθήνα.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η ευθεία (ε): $y=2x$ και τα σημεία του επιπέδου $A\left(\frac{\kappa^2+1}{2}, 2\kappa\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και

$B\left(\mu, \frac{1}{2}\mu\right)$, $\mu > 0$.

Γ1. i) Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο A, να βρείτε τις συντεταγμένες του B.

Μονάδες 4

ii) Αν ισχύει $|\overline{OB}| = \sqrt{5}$ όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.

Μονάδες 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(ε)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{a} = \overline{OA} = (1, 2)$, $\vec{b} = \overline{OB} = (2, 1)$, $\vec{\gamma} = (x, y)$ και $\vec{\delta} = (y, x)$ με $xy \neq 0$.

Γ2. Αν $\omega = (\vec{a}, \vec{b})$, $\varphi = (\vec{\gamma}, \vec{\delta})$ και $\vec{a} \perp \vec{\gamma}$ να αποδείξετε ότι:

i) $\text{συν}\omega = \frac{4}{5}$

Μονάδες 3

ii) $x = -2y$ και $\vec{b} \perp \vec{\delta}$

Μονάδες 4

iii) οι γωνίες φ και ω είναι παραπληρωματικές.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι

i) Τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ δεν είναι παράλληλα.

Μονάδες 3

ii) Το παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται από τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι ρόμβος.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία (ζ) με εξίσωση: $y = -\frac{3}{4}x - 2017$

Δ1. i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ), η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A με τεταγμένη 3.

Μονάδες 4

ii) Αν η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $3x + 4y - 12 = 0$ να βρείτε το σημείο τομής B της ευθείας (ϵ) με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν είναι A(0,3) και B(4,0) τότε:

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ του ευθυγράμμου τμήματος AB αν ισχύει:

$$\overline{A\Delta} = \frac{9}{25} \overline{AB}$$

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Α ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2Θ(ε)

- ii) Αν είναι $\Delta\left(\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$, να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΔ είναι το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ προς την υποτείνουσα.

Μονάδες 5

- Δ3. Θεωρούμε το σημείο $\Gamma(3,0)$. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισχύει:

$$(\overline{OM} \cdot \overline{OA})^2 + (\overline{OM} \cdot \overline{OG})^2 = (3|\overline{OM}|)^2$$

Μονάδες 7