ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=c\cdot f(x)$. Έχουμε:

$$F(x+h)-F(x)=c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)=c\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{c\cdot\left[f(x+h)-f(x)\right]}{h}=c\cdot\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Επομένως:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\cdot f'(x).$$

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ, με $x_1<x_2$, ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ, με $x_1<x_2$, ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Α3.

1. Λάθος.
2. Λάθος.
3. Σωστό.
4. Σωστό.
5. Λάθος.

ΗΡΑΚΛΗΣ ΖΩΓΡΑΦΟΣ ΞΑΝΘΗ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x)=\left(x^2\cdot συνx\right)'-\left(\dfrac{ημx}{x}\right)'=\left(x^2\right)'\cdot συνx+x^2\cdot\left(συνx\right)'-\left[\dfrac{(ημx)'\cdot x-ημx\cdot(x)'}{x^2}\right]=$

$=2x\cdot συνx+x^2\cdot\left(-ημx\right)-\dfrac{συνx\cdot x-ημx\cdot 1}{x^2}=2x\cdot συνx-x^2\cdot ημx-\dfrac{x\cdot συνx-ημx}{x^2}$

Β2. $f'(x)=\left(ημ^2x\right)'+\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+x}\right)'-\left[συν\left(3x-\sqrt{2}\right)\right]'=$

$=2\cdot ημx\cdot\left(ημx\right)'+\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+x}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)'-\left[-ημ\left(3x-\sqrt{2}\right)\right]\cdot\left(3x-\sqrt{2}\right)'=$

$=2\cdot ημx\cdot συνx+\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+x}}\left(x+1\right)+ημ\left(3x-\sqrt{2}\right)\cdot 3$

Β3. $f'(x)=\left(2x^3\right)'-\left(αx^2\right)'+\left(4x\right)'-\left(\dfrac{2}{3}\right)'=6x^2-2αx+4$

Η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα x’x στο $x=-2$. Άρα $f'(-2)=0$.

$f'\left(-2\right)=0\Leftrightarrow 6\cdot\left(-2\right)^2-2α\cdot\left(-2\right)+4=0\Leftrightarrow 24+4α+4=0\Leftrightarrow 4α=-28\Leftrightarrow α=-7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x^2+4\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq -4$ που ισχύει πάντα.

Επίσης, θα πρέπει $x^4+x^2\neq 0\Leftrightarrow x^2\left(x^2+1\right)\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases} x^2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0\\ x^2+1\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq -1,\ \text{ισχύει}\end{cases}$

Άρα $A_f=\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$

Γ2. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{x^4+x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{x^2+4}\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}{x^2\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^2-\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}{x^2\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-x^2-4}{x^2\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\left(x^2+1\right)\left(2+\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$=\frac{-1}{\left(0^2+1\right)\left(2+\sqrt{0^2+4}\right)}=-\frac{1}{4}$$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο x = 0, θα ισχύει:

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ***(1)***

$$f(0)=\frac{\kappa^3}{2}+\frac{\sigma\upsilon\nu\left(0^2+0\right)}{4}-\eta\mu\left(\frac{0}{2}\right)=\frac{\kappa^3}{2}+\frac{\sigma\upsilon\nu 0}{4}-\eta\mu 0=\frac{\kappa^3}{2}+\frac{1}{4}-0=\frac{\kappa^3}{2}+\frac{1}{4}\quad \textit{(1)}\quad =>$$

$$\frac{\kappa^3}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\kappa^3}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{\kappa^3}{2}=-\frac{2}{4}\Leftrightarrow\kappa^3=-\frac{4}{4}\Leftrightarrow\kappa^3=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\kappa=\sqrt[3]{-1}\Leftrightarrow\kappa=-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\left(-\frac{x^3}{3}\right)'+\left(\alpha x^2\right)'-(\beta x)'-(4)'=-\frac{1}{3}\cdot 3x^2+2\alpha x-\beta=-x^2+2\alpha x-\beta$

Δ2. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Μ(3,2), άρα: $f(3)=2$

$$f(3)=2\Leftrightarrow-\frac{3^3}{3}+\alpha\cdot 3^2-\beta\cdot 3-4=2\Leftrightarrow-9+9\alpha-3\beta-4=2\Leftrightarrow 9\alpha-3\beta=15$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με τετμημένη x = 2 είναι ίσος με 4, άρα: $\lambda=f'(2)=4$.

$$f'(2)=4\Leftrightarrow-2^2+2\alpha\cdot 2-\beta=4\Leftrightarrow-4+4\alpha-\beta=4\Leftrightarrow 4\alpha-\beta=8$$

Άρα: $\begin{cases}9\alpha-3\beta=15\\ 4\alpha-\beta=8\end{cases}\underset{x(-3)}{\Rightarrow}\begin{cases}9\alpha-3\beta=15\\ -12\alpha+3\beta=-24\end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε:

$9\alpha-12\alpha=15-24\Leftrightarrow-3\alpha=-9\Leftrightarrow\alpha=3$.

$4\alpha-\beta=8\Leftrightarrow 4\cdot 3-\beta=8\Leftrightarrow-\beta=8-12\Leftrightarrow\beta=4$.

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο x = 3 θα έχει τη μορφή: $y=\lambda x+\beta$

$\lambda=f'(3)=-3^2+2\cdot 3\cdot 3-4=-9+18-4\Leftrightarrow\lambda=-5$

$y=f(3)=2$, επομένως: $y=2\Leftrightarrow 2=-5\cdot 3+\beta\Leftrightarrow 2+15=\beta\Leftrightarrow\beta=17$

Εξίσωση της εφαπτομένης: $y=-5x+17$

ΗΡΑΚΛΗΣ Α. ΖΩΓΡΑΦΟΣ ΣΠΑΝΟΘΗ

Δ4 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)-5}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x^2+6x-9}{x^3-5x^2+3x+9}=\dfrac{0}{0}$ (Απροσδιόριστη Μορφή)

Παραγοντοποίηση Αριθμητή: $-x^2+10x-9=-(x-3)(x-3)=-(x-3)^2$, αφού η εξίσωση $-x^2+10x-9=0$ έχει διπλή ρίζα την $x=3$.

Παραγοντοποίηση Παρονομαστή: Εφαρμόζοντας σχήμα Χόρνερ:

1	–5	3	9	3
	3	–6	–9	
1	2	–3	0	

$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(1\cdot x^2-2\cdot x-3)=(x-3)(x^2-2x-3)$.

Το τριώνυμο που προκύπτει παραγοντοποιείται: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$, αφού η εξίσωση $x^2-2x-3=0$ έχει ρίζες τις $x_1=3$ και $x_2=-1$

$$\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)-5}{x^3-5x^2+3x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)^2}{(x-3)(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{3+1}=-\frac{1}{4}$$

ΗΡΑΚΛΗΣ ΖΩΓΡΑΦΟΣ
ΞΑΝΘΗ