

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 5 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 217.
- A2.** α) Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 241.
β) Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελ. 151.
- A3.** α) → Λάθος. Το σωστό είναι $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$.
β) → Λάθος. Το σωστό είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.
γ) → Σωστό.
δ) → Λάθος. Το σωστό είναι: Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
ε) → Λάθος. Το σωστό είναι $f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση $f(x) = -e^{3x} - x^3 + 1$ έχει πεδίο ορισμού το R .

Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$.

- Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$3x_1 < 3x_2 \text{ και } x_1^3 < x_2^3$$

$$e^{3x_1} < e^{3x_2} \text{ και } -x_1^3 > -x_2^3$$

$$-e^{3x_1} > -e^{3x_2} \text{ (1) και } -x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1 \text{ (2).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$-e^{3x_1} - x_1^3 + 1 > -e^{3x_2} - x_2^3 + 1.$$

Επομένως $f(x_1) > f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

- Παρατηρούμε ότι $f(0) = -e^0 - 0 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Άρα η f έχει τουλάχιστον, μία ρίζα, το $x_0 = 0$.

Αυτή είναι και μοναδική, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Έτσι για κάθε $x > 0$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει $f(x) < f(0)$, δηλαδή $f(x) < 0$.

Ενώ για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) > f(0)$, οπότε $f(x) > 0$.

Το πρόσημο της f φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	\circ	$-$

B2. Επειδή η f είναι συνεχής στο R , γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις, είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$.

Οπότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Για $x \neq 0$ έχουμε: $\frac{f(x)-1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{f(x)}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
(ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ Β΄ ΦΑΣΗΣ)

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Για $x > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 - \frac{1}{f(x)} \right] = +\infty$.

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) < 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Για $x < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[1 - \frac{1}{f(x)} \right] = -\infty$.

Όντως, στο Β1 ερώτημα αποδείξαμε, ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) > 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{f(x)}$.

B3. α) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R , είναι και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι το σύνολο τιμών της f .

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R . Έτσι, το σύνολο τιμών της, είναι το $f(R) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = R$.

Ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{3x} - x^3 + 1) = -\infty$.

-Ειδικά $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$.

Θέσαμε $u = 3x$, οπότε αν $x \rightarrow +\infty$ τότε $u \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty.$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{3x} - x^3 + 1) = +\infty$.

-Ειδικά $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$.

Θέσαμε $u = 3x$ οπότε αν $x \rightarrow -\infty$ τότε $u \rightarrow -\infty$,

ενώ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$.

β) Ισχύουν ισοδύναμα:

$$e^{-e^{3x} - x^3 - 2015} = 1 \Leftrightarrow e^{-e^{3x} - x^3 - 2015} = e^0 \Leftrightarrow -e^{3x} - x^3 - 2015 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e^{3x} - x^3 + 1 = 2016 \Leftrightarrow f(x) = 2016.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
(ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ Β΄ ΦΑΣΗΣ)

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Θέλουμε, λοιπόν, να δείξουμε ότι, η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$. Όμως η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και η τιμή $2016 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 2016$, έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αυτή είναι μοναδική, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

B4. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$e^{3g(x)} + g^3(x) = x^3 e^6 + (\ln x + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{\ln(x^3 e^6)} + (\ln x + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{\ln x^3 + \ln e^6} + (\ln x + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{3 \ln x + 6} + (\ln x + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow e^{3g(x)} + g^3(x) = e^{3(\ln x + 2)} + (\ln x + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow -e^{3g(x)} - g^3(x) = -e^{3(\ln x + 2)} - (\ln x + 2)^3$$

$$\Leftrightarrow -e^{3g(x)} - g^3(x) + 1 = -e^{3(\ln x + 2)} - (\ln x + 2)^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow f(g(x)) = f(\ln x + 2) \Leftrightarrow g(x) = \ln x + 2$$

- Για την εύρεση της αντίστροφης της g , θέτουμε $y = g(x)$ και λύνουμε ως προς x .

Έχουμε λοιπόν ισοδύναμα:

$$g(x) = y \Leftrightarrow y = \ln x + 2, y \in \mathbb{R}, \text{ καθώς } \ln x + 2 \in \mathbb{R}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \ln x = y - 2 &\Leftrightarrow x = e^{y-2}, y \in \mathbb{R} \\ \text{όμως } f^{-1}(y) = x &\end{aligned} \right\} \text{ οπότε } f^{-1}(y) = e^{y-2}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{και έτσι } f^{-1}(x) = e^{x-2}, x \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ισοδύναμα:

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1 - \sin^2 x - x^2$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = \eta\mu^2 x$$

$$\Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = \eta\mu^2 x \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται $h^2(x) = \eta\mu^2 x$ (2) και ισχύει για κάθε

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
 (ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ Β' ΦΑΣΗΣ)

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Η εξίσωση $h(x) = 0$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ γράφεται ισοδύναμα:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow h^2(x) = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επομένως, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Η h στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών και δεν μηδενίζεται σ'

αυτό. Άρα, στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η h διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\text{Όμως } h\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} > 0.$$

Συνεπώς για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ισχύουν $h(x) > 0$ και $\eta\mu x > 0$.

Οπότε η σχέση (2) γίνεται ισοδύναμα $h(x) = \eta\mu x$ ή ισοδύναμα $f(x) + x = \eta\mu x$

και τελικά $f(x) = \eta\mu x - x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Επιπλέον ισχύει $f(0) = \eta\mu 0 - 0 = 0$.

Εντέλει δείξαμε ότι, $f(x) = \eta\mu x - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ2.

$$\text{Έχουμε } g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

-Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

-Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ η g είναι συνεχής γιατί προέρχεται από πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις.

Επομένως, πρέπει η g να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Οπότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0) \quad (1).$$

-Για $x > 0$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + 1) = f(0) + 1 = 1 \quad (2)$.

Έχουμε δείξει στο Γ1, ότι η f είναι συνεχής στο 0, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

-Για $x < 0$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{\eta\mu(\kappa x)}{x} - 1 \right] = \kappa - 1 \quad (3)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
(ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ Β' ΦΑΣΗΣ)

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Αν θέσουμε $u = κx$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} u = \lim_{x \rightarrow 0^-} (κx) = 0$.

Έτσι, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(κx)}{x} = κ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(κx)}{κx} = κ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = κ \cdot 1 = κ$.

Επίσης $g(0) = f(0) + 1 = 1$ (4).

Η σχέση (1) λόγω των σχέσεων (2), (3) και (4) γίνεται ισοδύναμα:
 $1 = κ - 1 = 1$. Οπότε $κ - 1 = 1$ και άρα $κ = 2$.

Γ3. Για $κ = 2$ η g γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu 2x}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Η g είναι ορισμένη και συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\bullet \quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\eta\mu\left[2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]}{-\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{\eta\mu(-\pi)}{-\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{\eta\mu\pi}{-\frac{\pi}{2}} - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\bullet \quad g(0) = 1$$

$$\text{Άρα } g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(0) < 0$$

Έτσι από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$, έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Γ4. Παρατηρούμε ότι $g(-2\pi) = \frac{\eta\mu(-4\pi)}{-2\pi} - 1 = \frac{\eta\mu 4\pi}{2\pi} - 1 = 0 - 1 = -1$. Επίσης από

$$\text{ερώτημα Γ3, } g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Έτσι ισχύει $g(-2\pi) = g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ενώ $-2\pi \neq -\frac{\pi}{2}$.

Ωστε η g δεν είναι 1-1.

Ένας δεύτερος τρόπος στην περίπτωση που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε δύο ίσες τιμές, είτε στον ίδιο κλάδο, είτε σε διαφορετικούς κλάδους.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
(ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ Β' ΦΑΣΗΣ)

E_3.Μλ3ΘΟ(α)

Παρατηρούμε $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (-\infty, 0)$, ώστε $g(x_0) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} - 1\right) = 0 - 1 = -1$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$.

Απόδειξη:

$$|\eta\mu 2x| \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu 2x| \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$\left|\frac{\eta\mu 2x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε, από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0$.

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} - 1\right) = 1$.

Έστω η συνάρτηση $\Lambda(x) = g(x) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$, $x < 0$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Lambda(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[g(x) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = -1 - 2 + \frac{\pi}{2} = -3 + \frac{\pi}{2} < 0$.

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός a , κοντά στο $-\infty$, ώστε να ισχύει

ισοδύναμα: $\Lambda(a) < 0 \Leftrightarrow g(a) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow g(a) < 2 - \frac{\pi}{2}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[g(x) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\eta\mu 2x}{x} - 1 - 2 + \frac{\pi}{2}\right] = 2 - 1 - 2 + \frac{\pi}{2} = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$

Άρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $\beta < 0$, κοντά στο 0 , ώστε να ισχύει

ισοδύναμα:

$$\Lambda(\beta) > 0 \Leftrightarrow g(\beta) - \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow g(\beta) > 2 - \frac{\pi}{2}$$

Επομένως $g(a) < 2 - \frac{\pi}{2} < g(\beta)$ και η g είναι συνεχής στο $[a, \beta] \subseteq (-\infty, 0)$. Από

θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ άρα και στο $(-\infty, 0)$

ώστε $g(x_0) = 2 - \frac{\pi}{2}$. Εντέλει $g(x_0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ενώ, $x_0 \in (-\infty, 0)$ και $\frac{\pi}{2} \in (0, +\infty)$. Άρα

$x_0 \neq \frac{\pi}{2}$. Οπότε η g δεν είναι 1-1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}.$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = (e^x)' + (\frac{x^2}{2})' = e^x + x, x \in \mathbb{R}.$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R},$ με $x_1 < x_2,$ τότε ισχύει $e^{x_1} < e^{x_2}.$

Με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει: $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2,$ δηλαδή $f'(x_1) < f'(x_2).$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f'((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Όντως, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x) = -\infty,$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$

Όντως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x) = +\infty,$ γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$

Το $0 \in f'(R) = \mathbb{R},$ άρα, υπάρχει ένας τουλάχιστον $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(\rho) = 0.$

Ο ρ είναι μοναδικός, διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Τελικά, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα $\rho.$

Δ2. Για $x \neq \rho,$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{f(x) + f'(x) - f(\rho)}{x - \rho} = \lim_{x \rightarrow \rho} \left(\frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho} + \frac{f'(x) - f'(\rho)}{x - \rho} \right) =$$

$$= f'(\rho) + f''(\rho) = 0 + e^\rho + 1 = e^\rho + 1, \text{ διότι η } f \text{ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με } f''(x) = e^x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Δ3. α) Ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{h} = v, v \in \mathbb{N}^* \text{ και } v \neq 1.$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσο με 1.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{vh} = \frac{1}{v} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + vh) - g(x_0)}{h} = \frac{1}{v} \cdot v = 1$$

$$\text{Θέσαμε } x_0 + vh = x \Leftrightarrow x - x_0 = vh \Leftrightarrow h = \frac{x - x_0}{v}.$$

Αν $x \rightarrow x_0$ τότε $h \rightarrow 0.$

Επομένως, $g'(x_0) = 1.$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
(ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΔΟΣΗ Β' ΦΑΣΗΣ)

E_3.Μλ3Θ0(α)

- β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση:
 $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1.$
 Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $B(x_0, g(x_0))$ έχει εξίσωση:
 $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0 - 1 = 1(x - x_0) \Leftrightarrow y = x + 1.$
 Προφανώς οι δύο εφαπτόμενες συμπίπτουν.

- Δ4.** Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $g'(x_0) = 1.$
 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0) = x_0 + 1$, με
 $f'(g(x_0)) = f'(x_0 + 1) = e^{x_0 + 1} + x_0 + 1.$
 Η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0) = e^{x_0 + 1} + x_0 + 1.$