

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Έχουμε:

$$F(x+h) - F(x) = [f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)] = [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]$$

και για $h \neq 0$, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$. Επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

A2.

1. Δ
2. Σ
3. Δ
4. Σ
5. Δ

A3.

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

2. $(\sin x)' = \cos x$

3. $(e \cdot f(x))' = e \cdot f'(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$f'(x) = (x^3 \cdot \sigma\upsilon\nu x)' - \left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = (x^3)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^3 \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' - \left[\frac{(x+1)' \cdot x^2 - (x+1) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2}\right] =$$

$$= 3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x^3 \eta\mu x \cdot -\frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = 3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x^3 \eta\mu x - \frac{x+2}{x^3}$$

B2.

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+3x})' - \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\right)^{10}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x}} \cdot (x^2+3x)' - 10\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\right)' =$$

$$= \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} - 10\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2\right)^9 \cdot (x^2-x)$$

B3.

$$f'(x) = (\alpha x^3)' - \left(\frac{5}{2}x^2\right)' - (3x)' + (10)' = 3\alpha x^2 - 5x - 3$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (3\alpha x^2)' - (5x)' - (3)' = 6\alpha x - 5$$

Η γραφική παράσταση της f'' διέρχεται από το $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Άρα $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 6\alpha \cdot \frac{1}{2} - 5 = 1 \Leftrightarrow 3\alpha = 1 + 5 \Leftrightarrow 3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq -9$ που ισχύει πάντα.

Επίσης, θα πρέπει $3x - 12 \neq 0 \Leftrightarrow 3x \neq 12 \Leftrightarrow x \neq 4$.

Άρα $A_f = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

Γ2.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{3x-12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2+9} - 5)(\sqrt{x^2+9} + 5)}{3(x-4)(\sqrt{x^2+9} + 5)} =$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2+9})^2 - 5^2}{3(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+9-25}{3(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{3(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{3(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \frac{4+4}{3(5+5)} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο $x = 4$, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \quad (I)$$

$$(I) \Rightarrow \alpha^2 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{4}{15} + \frac{11}{15} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{15}{15} \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω η συνάρτηση εσόδων $E(x)$, τότε: $E(x) = 5x$ (σε ευρώ)

Δ2. Κέρδος = Έσοδα – Κόστος.

$$\text{Άρα: } P(x) = E(x) - K(x) = 5x - (x^2 - 5x + 9) = 5x - x^2 + 5x - 9 = -x^2 + 10x - 9 \quad (\text{σε ευρώ}).$$

Δ3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 9}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$ (Απρόσδιοριστη Μορφή)

$-x^2 + 10x - 9 = -(x-1)(x-9)$, αφού η εξίσωση $-x^2 + 10x - 9 = 0$ έχει ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 9$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-9)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-9)}{x+1} = \frac{-(1-9)}{1+1} = \frac{-(-8)}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

Δ4. $P'(x) = (-x^2 + 10x - 9)' = -2x + 10$

$$P''(x) = (P'(x))' = (-2x + 10)' = -2$$

$$\begin{aligned} 2P''(2) + P'(3) + P(4) &= 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 + 10 + (-4^2 + 10 \cdot 4 - 9) = \\ &= -4 - 6 + 10 - 16 + 40 - 9 = 40 - 25 = 15 \end{aligned}$$