ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.ΑΜλ3ΘΤ(α)

ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Β΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Ημερομηνία: Δευτέρα 5 Ιανουαρίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έχουμε:

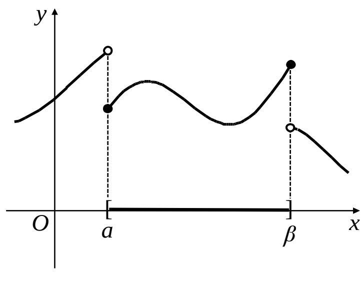
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow$$
$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = z_1 \cdot \overline{z}_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z}_2 \text{ που ισχύει.}$$

Α2. Η f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της , όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Α3.

Μια συνάρτηση f (θα λέμε ότι) είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν:

- είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον είναι συνεχής στα άκρα, δηλαδή
- $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$



Α4.

α. Λάθος

β. Σωστή

γ. Λάθος

δ. Σωστή

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β 1. Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η συνάρτηση $g(x)=-\ln x$ πρέπει $x>0$, έτσι προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της είναι το $A_g=(0,+\infty)$.

Για $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, είναι

$g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow -\ln x_1=-\ln x_2\Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η g είναι <<1-1>> και επομένως η g είναι αντιστρέψιμη.

Για $x>0$ θεωρούμε την εξίσωση (ως προς x) $y=g(x)$. Τότε:

$$y=g(x)\Leftrightarrow y=-\ln x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -y\cdot\ln e=\ln x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln e^{-y}=\ln x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-y}=x$$

Η ρίζα $x=e^{-y}$ είναι δεκτή αφού $e^{-y}>0$ και μοναδική για κάθε $y\in R$.

Άρα η αντιστροφή της g είναι η συνάρτηση $g^{-1}(x)=e^{-x}$, με $x\in R$.

Β 2.

✓ Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $\mathrm{A}(1,g(1))$ είναι

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)$$

Είναι

- $g(1)=0$
- $g'(1)=-1$

Έτσι $(\varepsilon_A): y=-x+1$

✓ Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g^{-1} στο σημείο της $B\left(x_{0,}g^{-1}(x_0)\right)$ είναι

$$y-g^{-1}(x_0)=\left(g^{-1}\right)'(x_0)(x-x_0).$$

- $g^{-1}(x_0)=e^{-x_o}$,
- $\left(g^{-1}\right)'(x_0)=-e^{-x_o}$

Έτσι

$$y-e^{-x_o}=-e^{-x_o}(x-x_o)$$

$$(\varepsilon_B): y=-e^{-x_o}\cdot x+e^{-x_o}\cdot x_o+e^{-x_o}$$

Για να ταυτίζονται οι ευθείες (ε_A), (ε_B) πρέπει και αρκεί να υπάρχει x_o ώστε

$$-1=-e^{-x_o} \quad (1)$$

και

$$1=e^{-x_o}\cdot x_o+e^{-x_o} \quad (2)$$

Από (1) έχουμε $1=e^{-x_o}$ έτσι η (2) γίνεται $1=1\cdot x_o+1 \Leftrightarrow x_o=0$.

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $B(0,g^{-1}(0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g^{-1}, είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $\mathrm{A}(1,g(1))$.

Β 3. Το πεδίο ορισμού της $h(x)=\ln x-e^{-x}$ είναι $A_h=(0,+\infty)$.
Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A_h=(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Έχουμε:

✓ $x_1<x_2 \overset{H\ \ln x\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi}{\Rightarrow} \ln(x_1)<\ln(x_2)$ (1),

✓ $x_1<x_2 \overset{E\pi\iota\ -1}{\Rightarrow} -x_1>-x_2 \overset{H\ e^x\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi}{\Rightarrow} e^{-x_1}>e^{-x_2} \overset{E\pi\iota\ -1}{\Rightarrow} -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\ln(x_1)-e^{-x_1}<\ln(x_2)-e^{-x_2} \Rightarrow h(x_1)<h(x_2),$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $A_h=(0,+\infty)$.

Επίσης

- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-e^{-x}\right)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x-\dfrac{1}{e^x}\right)=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης h είναι

$$h((0,+\infty))\overset{h\,\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{=}\left(\lim_{x\to 0^+}h(x),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Β 4. Για να είναι η συνάρτηση f όπου $f(x)=\begin{cases}\ln x, x>\alpha\\ e^{-x}, x\le\alpha\end{cases}$ συνεχής για κάποιο $\alpha>0$ πρέπει

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\lim_{x\to\alpha^-} f(x)=f(\alpha)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\alpha^+}\ln x=\lim_{x\to\alpha^-}e^{-x}=f(\alpha)\Leftrightarrow \ln\alpha=e^{-\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \ln\alpha-e^{-\alpha}=0\Leftrightarrow h(\alpha)=0$$

Τώρα το $0\in\overbrace{(-\infty,+\infty)}^{\text{σύνολο τιμών}}$, άρα υπάρχει $\alpha\in\overbrace{(0,+\infty)}^{\text{πεδίο ορισμού}}$ και μάλιστα μοναδικό αφού η $h(x)$ γνησίως αύξουσα, ώστε $h(\alpha)=0$, έτσι αποδείξαμε ότι η f είναι συνεχής για μοναδικό $\alpha>0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ 1. Για τον αριθμητή του δοθέντος ορίου:

Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη ισχύει $f(0)\neq f(1)\Leftrightarrow f(0)-f(1)\neq 0$ οπότε ο μεγιστοβαθμιος όρος του αριθμητή είναι ο $(f(0)-f(1))\cdot x^5$.

Για τον παρανομαστή του δοθέντος ορίου:

Αφού η $f:R\to R^*$ ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έτσι $f(1)\neq 0$ άρα ο μεγιστοβαθμιος όρος στον παρανομαστή είναι ο $f^2(1)\cdot x^2$ με $f^2(1)>0$

Έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(f(0)-f(1))\cdot x^5+x+1}{f^2(1)\cdot x^2+x+1}=-\infty\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{(f(0)-f(1))\cdot x^5}{f^2(1)\cdot x^2}=-\infty\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{(f(0)-f(1))}{f^2(1)}\cdot x^3=-\infty$$

Οπότε αναγκαία $\dfrac{f(0)-f(1)}{f^2(1)}>0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

Δηλαδή $f(0)-f(1)>0\Leftrightarrow f(0)>f(1)$

Έτσι για την γνησίως μονότονη συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$0<1 \text{ ενώ } f(0)>f(1)$$

επομένως προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για την συνάρτηση $h(\mathrm{x})=\mathrm{x}^3+e^x$ έχουμε:

Για τυχαία $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1{}^3<x_2{}^3$

και $x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$

Οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$x_1{}^3+e^{x_1}<x_2{}^3+e^{x_2} \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Γ 2. Για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$g(g(x))-f(0)\cdot g^3(x)=f(1)\cdot f(x^3+e^x+2015)\quad(1)$$

Για τυχαία $x_1,x_2\in R$ με $g(x_1)=g(x_2)$

- Παίρνουμε g:

$$g\left(g(x_1)\right)=g\left(g(x_2)\right)\quad(2)$$

- Υψώνουμε εις την τρίτη:

Έτσι
$$g^3(x_1)=g^3(x_2)$$
Επί $-f(0)$:

$$-f(0)\cdot g^3(x_1)=-f(0)\cdot g^3(x_2)\quad(3)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (2) και (3) κατά μέλη

$$g(g(x_1))-f(0)\cdot g^3(x_1)=g(g(x_2))-f(0)\cdot g^3(x_2)$$

λόγω της (1) έχουμε

$$f(1)\cdot f(x_1{}^3+e^{x_1}+2015)=f(1)\cdot f(x_2{}^3+e^{x_2}+2015)$$

όμως $f(1)\neq 0$ άρα

$$f(x_1{}^3+e^{x_1}+2015)=f(x_2{}^3+e^{x_2}+2015)$$

Τώρα αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι και <<1–1>> οπότε προκύπτει:

$$x_1{}^3+e^{x_1}+2015=x_2{}^3+e^{x_2}+2015$$
$$x_1{}^3+e^{x_1}=x_2{}^3+e^{x_2}$$
$$h(x_1)=h(x_2)$$
$$x_1=x_2$$

Αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και <<1–1>>.

Συνεπώς η g <<1–1>>.

Γ 3. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(0)\cdot x^4+x^2}{f(1)\cdot x^2+x+1}+\eta\mu x\right)\overset{x\neq 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4\left(f(0)+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(f(1)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\eta\mu x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{f(0)+\frac{1}{x^2}}{f(1)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{\eta\mu x}{x^2}\right)=+\infty$$

- Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{f(0)+\frac{1}{x^2}}{f(1)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\dfrac{f(0)}{f(1)}>0$

αφού η $f(x)\neq 0$ και συνεχής άρα διατηρεί το πρόσημο της οπότε το πηλίκο δυο οποιοδήποτε τιμών της είναι θετικό .

- Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}=0$ διότι

$$-1\leq \eta\mu x\leq 1 \qquad \text{διά } x^2\neq 0$$

$$-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\eta\mu x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$$

και αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\pm\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ 1. Για το $w^2-\sqrt{3}\cdot w+1=0$ έχουμε $\Delta=\sqrt{3}^2-4=-1$

έτσι $w_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ και $w_2=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ επομένως ο w είναι $w=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot i$

ισχύει

- $w^2=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$
- $w^3=w^2\cdot w=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i+\dfrac{3}{4}i-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=i$

Από την $1821=3\cdot 607$ έχουμε

$$w^{1821}=\left(w^3\right)^{607}=i^{607}=i^3=-i \text{ αφού } 607=4\cdot 151+3$$

Ακόμη $|w|=\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}=1$

Εναλλακτικά:

$\left|w^{1821}\right|=|-i|\Leftrightarrow |w|^{1821}=1\Leftrightarrow |w|=1$

Δ 2. Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in R$ με $|x|+|y|\neq 0$ τότε

$$\frac{-2\cdot \operatorname{Re}(z)}{|z|^2}+|w|=0\Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+y^2}+1=0\Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-2x=0\Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1+y^2=1\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$

Οπότε γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $\mathrm{K}(1,0)$, ακτίνα $\rho=1$ και με μιγαδική εξίσωση $|z-(1+0i)|=1\Leftrightarrow |z-1|=1$ εκτός του σημείου $\mathrm{O}(0,0)$, (αφού $z\neq 0$).

Εναλλακτικά

Ισχύει

$$\frac{-2\operatorname{Re}z}{|z|^2}+|w|=0 \overset{z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)}{\Leftrightarrow} \frac{-(z+\bar{z})}{z\cdot\bar{z}}+1=0 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}=0 \quad (1)$$

Έστω ότι $|z-1|=1 \Leftrightarrow |z-1|^2=1 \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}=0 \quad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο $|z-1|=1$.

Δ 3.

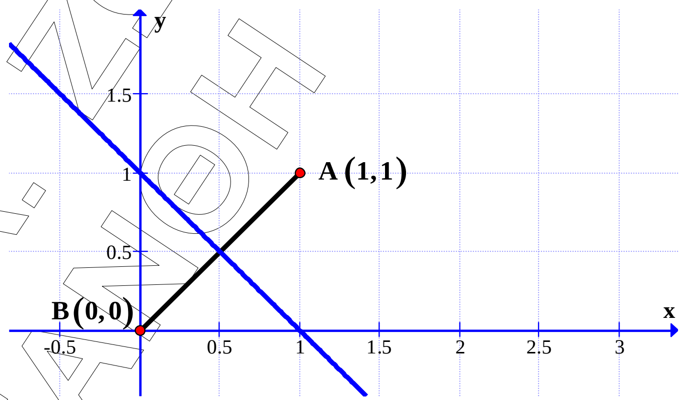
α. Ισχύει $z\cdot u=1+i \Leftrightarrow z=\frac{1+i}{u}$ (είναι $u\neq 0$ αφού $1+i\neq 0$) έτσι η $|z-1|=1$ γίνεται:

$$\left|\frac{1+i}{u}-1\right|=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|1+i-u|}{|u|}=1 \Leftrightarrow$$

$$|1+i-u|=|u| \Leftrightarrow$$

$$|u-(1+i)|=|u|$$



Έτσι η εικόνα του u κινείται στην μεσοκάθετο του AB με $A(1,1), B(0,0)$.

Για $u=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$|u-(1+i)|=|u| \Leftrightarrow |x+y\cdot i-1-i|=|x+y\cdot i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(x-1)+(y-1)\cdot i|=|x+y\cdot i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x-2y+2=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$$

β. Είναι

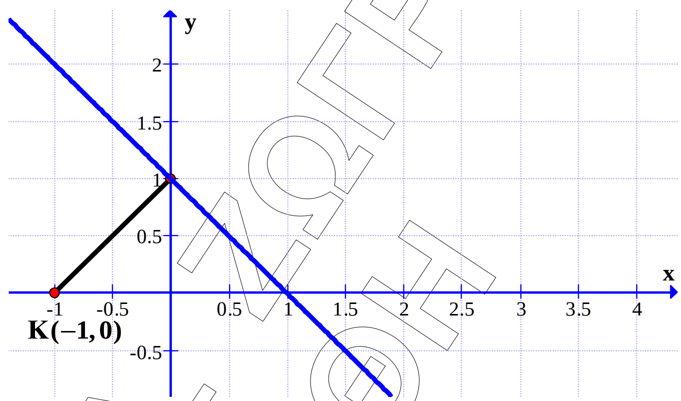
$$|z-1+z\cdot u-u|=|z-1+u\cdot(z-1)|=|(z-1)\cdot(1+u)|=$$

$$=|z-1|\cdot|1+u| \overset{\varepsilon\rho\omega\tau\ \Delta 2}{=} 1\cdot|u-(-1+0\cdot i)|=|u-(-1+0\cdot i)|$$

Το $|u-(-1+0\cdot i)|$ παριστάνει την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού u από το σημείο $\mathrm{K}(-1,0)$.

Η εικόνα του u κινείται στην μεσοκάθετο του AB με εξίσωση $x+y-1=0$.

Ο μιγαδικός αριθμός u του οποίου η εικόνα απέχει την μικρότερη απόσταση από το σημείο $\mathrm{K}(-1,0)$ είναι αυτός που έχει εικόνα το ίχνος της κάθετης από το σημείο Κ προς την ευθεία $x+y-1=0$.



Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετη στην ευθεία ε.

Είναι $\lambda_\zeta=-\dfrac{1}{\lambda_\varepsilon}=1$ άρα

$$(\zeta): y-y_{\mathrm{K}}=\lambda_\zeta\cdot(x-x_{\mathrm{K}})\Leftrightarrow y-0=x-(-1)\Leftrightarrow y=x+1$$

Λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x+y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x+1 \\ x+x+1-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x+1 \\ 2x=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Άρα τέμνονται στο σημείο $\Lambda\ (0,1)$ και ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $u=0+1\cdot i$ και η αντίστοιχη τιμή του z είναι

$$z\cdot i=1+i\Leftrightarrow z=\frac{1+i}{i}=1-i.$$

Δ 4. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x)=(1-x)\left(|z+\overline{z}-2|-2\right)-x\left(|z-\overline{z}|-2\right),\ \text{ορισμένη στο } x\in[0,1]$$

Έχουμε:

- $f(0)=|z+\overline{z}-2|-2=|2\alpha-2|-2=2|\alpha-1|-2$

- $f(1) = -|z-\overline{z}| + 2 = -\left(2|\beta| - 2\right) = 2 - 2|\beta|$

Για τον μιγαδικό z ισχύει $|z-1| = 1$ με $z = \alpha + \beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$, $\alpha \neq 1$ άρα

$$(\alpha-1)^2 + \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\beta^2 = (\alpha-1)^2 > 0 \ \ (3) \\ 1-(\alpha-1)^2 = \beta^2 > 0 \ \ (4) \end{cases} \text{αφού } \alpha \neq 1 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι από (3) έχουμε

$$1-\beta^2 > 0 \Leftrightarrow \beta^2 < 1 \Leftrightarrow |\beta| < 1 \Leftrightarrow 2|\beta| < 2 \Leftrightarrow 2 - 2|\beta| > 0 \Leftrightarrow f(1) > 0$$

Ενώ από την (4) προκύπτει ότι:

$$1-(\alpha-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 < 1 \Leftrightarrow |\alpha-1| < 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2|\alpha-1| < 2 \Leftrightarrow 2|\alpha-1| - 2 < 0 \Leftrightarrow f(0) < 0$$

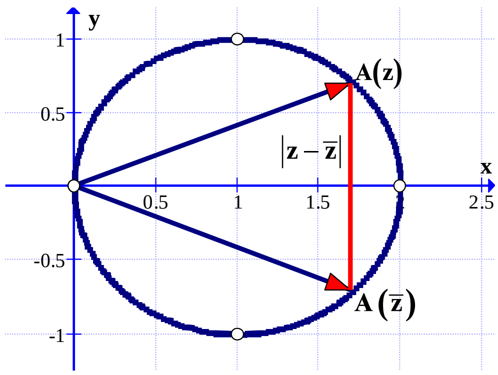
Συνεπώς για τη συνεχή (ως πολυωνυμική) συνάρτηση f στο $[0,1]$ ισχύει $f(0)f(1) < 0$.
Οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano.

Άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow (1-\xi)\left(|z+\overline{z}-2| - 2\right) - \xi\left(|z-\overline{z}| - 2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{|z+\overline{z}-2| - 2}{\xi} = \frac{|z-\overline{z}| - 2}{1-\xi}$$

Εναλλακτικά

Έχουμε



- $|z+\overline{z}-2| - 2 = |2\alpha - 2| - 2 = 2|\alpha-1| - 2$ και από το σχήμα
  $0 < \alpha < 2 \Rightarrow -1 < \alpha - 1 < 1 \Rightarrow |\alpha-1| < 1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2|\alpha-1| < 2 \Rightarrow 2|\alpha-1| - 2 < 0 \Rightarrow f(0) < 0$

- $\left|z-\overline{z}\right|-2=2\left|\beta\right|-2$ και από το σχήμα
  $-1<\beta<1 \Leftrightarrow \left|\beta\right|<1 \Rightarrow 2\left|\beta\right|-2<0 \Rightarrow 2-2\left|\beta\right|-2>0 \Rightarrow f(1)>0$

Εναλλακτικά :

- $\left|z+\overline{z}-2\right|=\left|z-1+\overline{z}-1\right|\le\left|z-1\right|+\left|\overline{z}-1\right|=1+1=2$ και
- $\left|z-\overline{z}\right|=\left|z-1-\left(\overline{z}-1\right)\right|=\left|z-1-\left(\overline{z}-1\right)\right|\le\left|z-1\right|+\left|\overline{z}-1\right|=1+1=2$

Το ίσον δεν μπορεί να ισχύει αφού $z\neq 0,2,1\pm i$

- $f\left(0\right)=\left(2\left|\alpha-1\right|-2\right)<0$
- $f\left(1\right)=-\left(2\left|\beta\right|-2\right)>0$

Εναλλακτικά :

Για $x\neq 0, x\neq 1$ έχουμε

$$\frac{\left|z+\overline{z}-2\right|-2}{x}=\frac{\left|z-\overline{z}\right|-2}{1-x}\overset{z=\alpha+\beta i,\alpha,\beta\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}\ldots\Leftrightarrow\frac{\left|\alpha-1\right|-1}{x}=\frac{\left|\beta\right|-1}{1-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\alpha-1\right|-1-x\left(\left|\alpha-1\right|-1\right)=x\left(\left|\beta\right|-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\alpha-1\right|-1=x\left(\left|\beta\right|+\left|\alpha-1\right|-2\right)$$

- Αν $\left|\beta\right|+\left|\alpha-1\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha-1\right|=2-\left|\beta\right|$ τότε από την
  $\left|\beta\right|^2+\left|\alpha-1\right|^2=1$ έχουμε
  $\left|\beta\right|^2+\left(2-\left|\beta\right|\right)^2=1\Leftrightarrow\left|\beta\right|^2+4-4\left|\beta\right|+\left|\beta\right|^2=1\Leftrightarrow\ 2\left|\beta\right|^2-4\cdot\left|\beta\right|+3=0$ η οποία έχει $\Delta=16-4\cdot 2\cdot 3<0$ άρα είναι αδύνατη,
- Άρα $\left|\beta\right|+\left|\alpha-1\right|-2\neq 0$ έτσι η $\left|\alpha-1\right|-1=x\left(\left|\beta\right|+\left|\alpha-1\right|-2\right)$ έχει λύση επομένως η εξίσωση $\dfrac{\left|z+\overline{z}-2\right|-2}{x}=\dfrac{\left|z-\overline{z}\right|-2}{1-x}$ για $x\neq 0, x\neq 1$ έχει πάντα λύση και μάλιστα μοναδική αφού είναι πρωτοβάθμια.