

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 27 Απριλίου 2014

**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^v$ ,  $v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = vx^{v-1}$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

i) Αν μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  έχει αντίστροφη, τότε  $f^{-1}(f(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .

**Μονάδες 2**

ii) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

iii) Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο σημείο  $x_0$ , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

**Μονάδες 2**

iv) Μια συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$  συνάρτηση, παίρνει σε κάθε περίπτωση στο  $(\alpha, \beta)$  μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

**Μονάδες 2**

v) Αν  $f$  συνεχής συνάρτηση στο  $[\alpha, \beta]$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι μιγαδικοί  $z, z_1$  και  $w$  με  $z = \alpha + \beta i$ , με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τέτοιοι, ώστε ο

$$z_1 = \frac{1 + (\beta - 2)i}{\alpha + 2 - i} \text{ να είναι φανταστικός και } \left| (1 - i) \operatorname{Im} \left( w + \frac{1 - i}{2} \right) \right| = \sqrt{2} \left| w + \frac{1}{2}i \right|.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $x - y + 4 = 0$ .

**Μονάδες 6**

**β)** Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι η παραβολή με εξίσωση  $x^2 + 2y = 0$ .

**Μονάδες 6**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $|z - w| \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}$ .

**Μονάδες 5**

**B3. α)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο  $C$  των εικόνων του  $\bar{w}$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 3**

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την ευθεία  $x - y + 4 = 0$  και την γραμμή  $C$  του προηγούμενου ερωτήματος.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  με  $f(1) = 1, g(1) = 0$  και ικανοποιούν τις σχέσεις:  $f'(x) = f(x) = e^x g'(x) - 1$  και  $2f(x) + x^2 - 2x \geq 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x g(x) + 1$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2. α)** Να υπολογίσετε το  $g'(1)$ .

**Μονάδες 3**

**β)** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1)g\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \right] = 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ3.** Αν, επιπλέον  $g(x) = (x-1)^2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε

**α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**β)** Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , από το σημείο  $M(1, \lambda)$  άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h$  με  $h(x) = e^x(1-x) + 1$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Η συνάρτηση  $g$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2} dt < g''(x) e^{\frac{[g''(x)]^2}{2}} - g''(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(2) = -2, \int_{-2}^{g(0)} e^{t^2} dt \cdot \int_{-2}^{g(1)} e^{t^2} dt < 0.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $g'$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\rho \in (0, 1)$ , τέτοιο, ώστε  $g(\rho) = -2$  (μονάδες 5) και  $g'(\rho) < 0 < g'(2)$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση  $g(1+x-x^3) = g(1) + g(x) - g(x^3)$ ,  $x > 0$ .

**Μονάδες 5**

**Ευχόμαστε Επιτυχία**