

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 13 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής στο A;

Μονάδες 4

A3. Τι λέγεται ιστόγραμμα συχνοτήτων και πώς κατασκευάζεται;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για την παραγωγή της σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

β) Αν οι συναρτήσεις f και g ορίζονται σε ένα σύνολο A τότε το πηλίκο

$$R = \frac{f}{g} \text{ με } R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ ορίζεται στο A.}$$

γ) Η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

δ) Σε μια κατανομή συχνοτήτων, αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές της μεταβλητής X με συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k αντίστοιχα, τότε η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i$$

ε) Για την πιθανότητα του κενού συνόλου ισχύει ότι: $P(\emptyset) = 1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$, όπου a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε τα σημεία $M(k, f(k))$ της καμπύλης της συνάρτησης f και τα σημεία $N(\lambda, f'(\lambda))$ της καμπύλης της συνάρτησης f' . Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2, 5)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο A έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 12, τότε:

B1. Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και $b = -3$.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $B(-1, f(-1))$.

Μονάδες 4

B3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι $f(2013) < f(2014)$.

Μονάδες 5

B4. Αν $A = \{ k \in \Omega / \text{η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } M \text{ παράλληλη στον } x'x \}$ και $B = \{ \lambda \in \Omega / \text{η εφαπτομένη της καμπύλης της παραγώγου } f', \text{ στο } N \text{ να έχει θετική κλίση} \}$ είναι ενδεχόμενα του Ω .

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A, B και την πιθανότητα του ενδεχομένου:

Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Μια εταιρεία παραγωγής παιχνιδιών έχει δύο εργοστάσια, σε δύο διαφορετικές πόλεις της Ελλάδας την A και την B . Στην εταιρεία απασχολούνται σήμερα 200 υπάλληλοι με μέσο χρόνο εργασίας 13,6 έτη.

Γ1. Στο εργοστάσιο της πόλης A εργάζονται $v_A = 40$ υπάλληλοι όπου τα χρόνια υπηρεσίας τους, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Χρόνια Εργασίας	x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
[.-)	6		0,2		
[.-)					0,6
[12 -.)				28	
[.-)					
ΣΥΝΟΛΟ		$v = 40$			

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 4

β) Να βρεθεί η πιθανότητα επιλέγοντας τυχαία έναν υπάλληλο από το εργοστάσιο της πόλης A να έχει εργαστεί 11 τουλάχιστον χρόνια στο εργοστάσιο αυτό.

Μονάδες 3

γ) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση των χρόνων εργασίας των υπαλλήλων στην πόλη A.

Μονάδες 3

Γ2. Στην πόλη B εργάζονται οι υπόλοιποι υπάλληλοι της εταιρείας. Αν τα χρόνια εργασίας τους στο εργοστάσιο της πόλης B ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή:

α) Να δειχθεί ότι ο μέσος χρόνος εργασίας στο εργοστάσιο αυτό είναι 14 έτη.

Μονάδες 3

β) Αν το πλήθος των υπαλλήλων που έχει τουλάχιστον 22 έτη εργασίας είναι 4, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση είναι $S_B = 4$.

Μονάδες 3

Γ3. α) Να συγκρίνετε μεταξύ τους ως προς την ομοιογένεια τις δυο ομάδες των υπαλλήλων στα εργοστάσια των πόλεων A και B.

Μονάδες 4

β) Στην διάρκεια των 4 επόμενων ετών η εταιρεία έχει στόχο στο εργοστάσιο της πόλης A να απολύσει όσους υπάλληλους έχουν σήμερα τουλάχιστον 12 χρόνια εργασίας και ταυτόχρονα να προσλάβει νέους υπαλλήλους ίσου πλήθους με αυτούς που απολύθηκαν. Να βρεθεί στο τέλος της τετραετίας ο νέος μέσος χρόνος εργασίας των υπαλλήλων και στα δύο εργοστάσια της εταιρείας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} e^{ax^2+2x} - 3x^2 + 2x + 8, & \text{αν } x \neq 0 \\ -a^2 - 6a & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και

$g(x) = x^2 + (1 - e)x - e$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Για τα απλά ενδεχόμενα του Ω ισχύει ότι: $2P(-1) = 2P(0) = 2P(1) = P(2) = P(3) = P(4)$.

- Δ1.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ να βρείτε την τιμή του a .
Μονάδες 3
- Δ2.** Να βρεθούν οι πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων του Ω .
Λαμβάνοντας υπόψη ότι $a = -3$ να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα
Μονάδες 3
- Δ3.** Αν A, B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω με: $A = \{1, y^2 - 4y + 5, 4\}$,
 $B = \{0, \kappa, -2y + 4\}$ όπου $\kappa = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{f'(x)}{-6x + 2} e^x \right)$
- α)** Να βρείτε την τιμή του $y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $A \cap B = \{1, 2\}$.
Μονάδες 5
- β)** Για την τιμή του y που βρήκατε να αποδείξετε ότι: $P(A) = \frac{5}{9}, P(B) = \frac{4}{9}$ και να βρείτε τις πιθανότητες:
 $P(A \cup B)$ και $P(A - B)$
Μονάδες 4
- Δ4. α)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της g που είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $y = (3 - e)x + 7$.
Μονάδες 4
- β)** Θεωρούμε το σύνολο των παρατηρήσεων $E = \{P(A), P(A - B), P(A \cup B)\}$ με τα στοιχεία του E όπως βρέθηκαν στο Δ3.
Αν $M_\nu(x_\nu, y_\nu)$ με $\nu = 1, 2, 3$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ϵ) και τα $x_\nu \in E$, να υπολογίσετε την μέση τιμή των τεταγμένων y_ν .
Μονάδες 6