**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 217 την απόδειξη του Θεωρήματος.

**Α2.** Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 150 τον ορισμό του μεγίστου.

**Α3.** Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 234 την απόδειξη του τύπου $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$.

**Α4.**
- **i.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 152 τα σχόλια.
- **ii.** Ψευδής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 90 τις δυνάμεις του i με υ = 3.
- **iii.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 165 το Θεώρημα 1$^{\text{ο}}$.
- **iv.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 241 τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής.
- **v.** Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 261 το σχόλιο του Θεωρήματος του Fermat.

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Τα πεδία ορισμού των f, g είναι αντίστοιχα τα $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = (0, +\infty)$

- Η fog έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x > 0 \text{ και } g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$$

Για τέτοιες τιμές του x, έχουμε:

$$(fog)(x) = f\left(g(x)\right) = e^{g(x)-2} = e^{\ln x} = x$$

Ώστε $(fog)(x) = x$ με $x \in (0, +\infty)$

- Η gof ορίζεται στο σύνολο

$$\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^{x-2} > 0\} = \mathbb{R}$$

Για τέτοιες τιμές του x, έχουμε:

$$(gof)(x) = \ln f(x) + 2 = \ln e^{x-2} + 2 = (x-2) + 2 = x$$

Ώστε $(gof)(x) = x$ με $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις fog και gof δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, επομένως δεν είναι ίσες.

**Β2.** Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 2 \neq x_2 - 2 \Rightarrow e^{x_1-2} \neq e^{x_2-2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως η f είναι 1 – 1 και έχει αντίστροφη. Έχουμε

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = e^{x-2} \\ &\Leftrightarrow x - 2 = \ln y, \quad y > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \ln y + 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Άρα $f^{-1}(x) = \ln x + 2,\ x > 0$

**Β3** Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^{x-2} - \ln x - 2,\ x \in [e^{-2},\ 2]$.

- Η h είναι συνεχής. Πράγματι η συνάρτηση $e^{x-2}$ είναι συνεχής, ως σύνθεση της πολυωνυμικής x – 2 με την εκθετική $e^x$, οι οποίες είναι συνεχείς. Επομένως η h είναι συνεχής, γιατί προκύπτει από πράξεις των συνεχών συναρτήσεων $e^{x-2}$, lnx (λογαριθμική) και 2 (σταθερή).
- Είναι

$$h(e^{-2}) = e^{e^{-2}-2} - \ln e^{-2} - 2 = e^{e^{-2}-2} + 2 - 2 = e^{e^{-2}-2} > 0$$

και

$$h(2) = e^{2-2} - \ln 2 - 2 = -1 - \ln 2 < 0$$

Οπότε:

$$h(e^{-2}) \cdot h(2) = e^{e^{-2}-2}(-1 - \ln 2) < 0$$

Εφαρμόζεται, επομένως το Θεώρημα του Bolzano για την h στο διάστημα $[e^{-2}, 2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ με $h(x_0) = 0$. Τότε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} - \ln x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = \ln x_0 + 2$$

Αυτό σημαίνει, ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $x_0 \in (e^{-2}, 2)$ και αποδεικνύει το ζητούμενο.

**Β4.** Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{(gof)(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{x-2}}{x} = 0$, γιατί

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^2} = \frac{1}{e^2} \lim_{x\to-\infty} e^x = \frac{1}{e^2} \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Ακόμα, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{(fog)(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x + 2}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + 2) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{\infty}{\infty}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, οπότε από το αντίστοιχο θεώρημα του De L' Hospital έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{(fog)(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+2)'}{(x)'}=0$$

Ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{(gof)(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{(fog)(x)}=0$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** **i** Είναι $1+3\alpha^2\neq 0$, οπότε:

$$f(x)=\frac{1}{1+3\alpha^2}e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Η συνάρτηση 2tf(t) είναι συνεχής, ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων 2t και f (t), οπότε η συνάρτηση που ορίζεται από το ολοκλήρωμα $\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η $-\int_1^x 2tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επομένως η συνάρτηση $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, της $-\int_1^x 2f(t)dt$ με την εκθετική $e^x$. Το γινόμενό της επί τον αριθμό $\frac{1}{1+3\alpha^2}$, δηλαδή η $f(x)=\frac{1}{1+3\alpha^2}e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$ είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{1+3\alpha^2}\left(e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}\right)'=\frac{1}{1+3\alpha^2}e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}\left(-\int_1^x 2tf(t)dt\right)'$$

$$=f(x)\left(-2xf(x)\right)=-2xf^2(x)$$

**ii.** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$, αφού $1+3\alpha^2>0$ και $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}>0$. Έτσι

$$f'(x)=-2xf^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-2x\Leftrightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=\left(x^2\right)'$$

Επομένως υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, ώστε

$$\frac{1}{f(x)}=x^2+c \qquad \textbf{(2)}$$

Η (1) για $x=1$ δίνει $f(1)=\frac{1}{1+3\alpha^2}$.

Η (2) δίνει $\frac{1}{f(1)}=1+c\Leftrightarrow 1+3\alpha^2=1+c\Leftrightarrow c=3\alpha^2$

Άρα η (2) δίνει $f(x)=\frac{1}{x^2+3\alpha^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Γ2.** Έχουμε

$$\int_0^{\alpha} t\,f(t)dt = \int_0^{\alpha} \frac{t}{t^2+3\alpha^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \frac{(t^2+3\alpha^2)'}{t^2+3\alpha^2}dt = \left[\frac{1}{2}\ln|t^2+3\alpha^2|\right]_0^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 4\alpha^2 - \frac{1}{2}\ln 3\alpha^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη του α.

**Γ3.** Η f, ως ρητή, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+3\alpha^2}\right)' = -\frac{(x^2+3\alpha^2)'}{(x^2+3\alpha^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2+3\alpha^2)^2}$$

Το πρόσημο της $f'$ με την μονοτονία και το ακρότατο της $f$ φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

| **x** | $-\infty$ | | **0** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **f΄** | | + | 0 | – | |
| **f** | | ↗ | $\frac{1}{3\alpha^2}$ | ↘ | |

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = \frac{1}{3\alpha^2}$

Για την $f''$ έχουμε:

$$f''(x) = -2\left[\frac{x}{(x^2+3\alpha^2)^2}\right]' = -2\frac{(x^2+3\alpha^2)^2 - x\left[(x^2+3\alpha^2)^2\right]'}{(x^2+3\alpha^2)^4} =$$

$$= -2\frac{(x^2+3\alpha^2)^2 - 4x^2(x^2+3\alpha^2)}{(x^2+3\alpha^2)^4} = -2\frac{x^2+3\alpha^2-4x^2}{(x^2+3\alpha^2)^3} = 6\frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+3\alpha^2)^3}$$

Το πρόσημο της $f''$ με την κυρτότητα της f και τα σημεία καμπής της φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

| **x** | $-\infty$ | | $-\lvert\alpha\rvert$ | | $\lvert\alpha\rvert$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f΄΄** | | + | **0** | – | 0 | + | |
| **f** | | ∪ | $\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ | ∩ | $\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ | ∪ | |

Η $f$ είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -|\alpha|]$, $[|\alpha|, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-|\alpha|, |\alpha|]$. Έχει σημεία καμπής τα $(-|\alpha|, 1/4\alpha^2)$ και $(|\alpha|, 1/4\alpha^2)$

Η f, ως συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Στα $+\infty$ και $-\infty$ έχουμε:

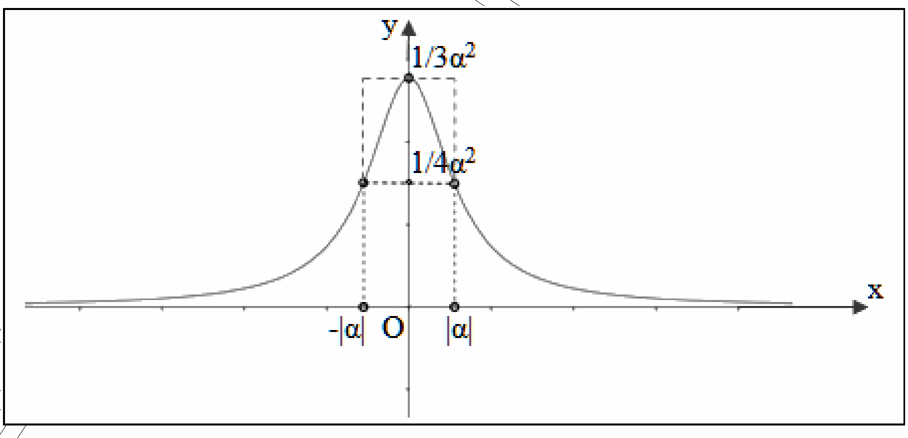
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+3\alpha^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+3\alpha^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τον άξονα των x.
Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

| **x** | $-\infty$ | | $-\lvert\alpha\rvert$ | | **0** | | $\lvert\alpha\rvert$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **f΄** | | + | | + | 0 | − | | − | |
| **f΄΄** | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| **f** | 0 ↗ | | $\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ | ↗ | $\frac{1}{3\alpha^2}$ max | ↘ | $\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ | ↘ | 0 |

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο επόμενο σχήμα:




**Παρατήρηση.** Η f είναι άρτια αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+3\alpha^2} = \frac{1}{x^2+3\alpha^2} = f(x)$$

Επομένως μπορούμε να την μελετήσουμε στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να επεκτείνουμε τα συμπεράσματα στο $\mathbb{R}$.

**Γ4.** Το ζητούμενο εμβαδό (βλέπε τη γραφική παράσταση της f ) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό $E_1 = |\alpha|\frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4|\alpha|}$ του ορθογωνίου που ορίζεται από τους άξονες και τις ευθείες $x = \alpha$, $y = \dfrac{1}{4\alpha^2}$, και μικρότερο από το εμβαδό $E_2 = |\alpha|\dfrac{1}{3\alpha^2} = \dfrac{1}{3|\alpha|}$ του ορθογωνίου που ορίζεται από τους άξονες και τις ευθείες $x = \alpha$, $y = \dfrac{1}{3\alpha^2}$. Επομένως $\dfrac{1}{4|\alpha|} < E < \dfrac{1}{3|\alpha|}$

**Αλλιώς:** Με $\alpha > 0$, επειδή $f(x) > 0$ είναι $E = \int_0^{\alpha} |f(x)|\,dx = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \alpha]$, οπότε για $x \in [0, \alpha]$ είναι

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha^2} \le f(x) \le \frac{1}{3\alpha^2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \ge 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \ge 0$$

Επειδή οι αντίστοιχες ισότητες δεν ισχύουν σε όλο το $[0, \alpha]$, έχουμε

$$\int_0^{\alpha} \left[f(x) - \frac{1}{4\alpha^2}\right]dx > 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{\alpha} \left[\frac{1}{3\alpha^2} - f(x)\right]dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\alpha} f(x)dx - \left[\frac{x}{4\alpha^2}\right]_0^{\alpha} > 0 \quad \text{και} \quad \left[\frac{x}{3\alpha^2}\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} f(x)dx > 0$$

$$\Leftrightarrow E - \frac{1}{4\alpha} > 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha} - E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha} < E < \frac{1}{3\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Με $\alpha < 0$ θα εργαστούμε ομοίως.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x+2}, x \ne -2$$

Τότε

$$\lim_{x \to -2} g(x) = -1 \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$f(x) = (x+2)g(x) + 2e^{x+2},\ x \ne -2 \qquad \textbf{(2)}$$

Είναι

$$\lim_{x \to -2}[g(x)(x+2) + 2e^{x+2}] = \lim_{x \to -2}[g(x)(x+2)] + \lim_{x \to -2} 2e^{x+2} = 0 + 2 = 2$$

οπότε

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 2$$

Η f, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = -2$, έτσι

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(-2) = 2 \qquad \textbf{(3)}$$

Έχουμε, με $x \ne -2$

$$\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} \overset{(1),(3)}{=} \frac{(x+2)g(x)+2e^{x+2}-2}{x+2} = \frac{(x+2)g(x)}{x+2} + 2\frac{e^{x+2}-1}{x+2} = g(x) + 2\frac{e^{x+2}-1}{x+2}$$

Το όριο $\lim\limits_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(e^{x+2}-1\right)'}{(x+2)'} = \lim_{x\to -2}(e^{x+2}) = e^{0} = 1$$

Επομένως, εφαρμόζεται ο αντίστοιχος κανόνας του De L' Hospital σύμφωνα με το οποίο βρίσκουμε

$$\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(e^{x+2}-1)'}{(x+2)'} = 1$$

Τότε

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\left[g(x) + 2\frac{e^{x+2}-1}{x+2}\right] = \lim_{x\to -2} g(x) + 2\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2} = 1$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η $C_f$ είναι κοίλη, γιατί $f''(x) < 0$ στο $\mathbb{R}$. Επομένως τα σημεία της $C_f$ είναι κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της στο σημείο της $A(-2,\ f(-2))$, εκτός του σημείου επαφής που είναι κοινό σημείο. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Leftrightarrow y - 2 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 4$$

Άρα $f(x) \le x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Παρατήρηση.** Η σχέση αυτή αποδεικνύεται και με τη βοήθεια της συνάρτησης $T(x) = f(x) - x - 4$, η οποία έχει μέγιστο το $T(-2) = 0$.

**Δ2.** Είναι $f(-2) = f(0) = 2$. Ακόμα η f είναι συνεχής στο [–2, 0] και παραγωγίσιμη στο (–2, 0), ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα [–2, 0], οπότε υπάρχει $x_0 \in (-2,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Επειδή $f''(x) < 0$ η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το $x_0$ είναι μοναδική της ρίζα και

- για κάθε $x \in (-\infty,\ x_0)$ είναι $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$
- για κάθε $x \in (x_0,\ +\infty)$ είναι $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$

Άρα η f ως συνεχής έχει μέγιστο (ολικό) το $f(x_0)$ με $x_0 \in (-2,\ 0)$.

**Δ3.** Η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι 1–1, οπότε

$$f'\left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x)\,dt\right) = f'(0) \Leftrightarrow \int_0^{2(x-5)} f(t-x)\,dt = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Αρκεί να δείξουμε, ότι η (4) έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την x = 5.

Πράγματι, για $x = 5$ η (4) επαληθεύεται, γιατί γίνεται $\int_0^0 f(t-x)dt = 0$.

Για να δείξουμε την μοναδικότητα της ρίζας θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^{2(x-5)} f(t-x)dt\,,\ x \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε $t - x = u$, οπότε $dt = du$. Για $t = 0$ το $u = -x$ και για $t = 2(x - 5)$ το $u = x - 10$, επομένως

$$h(x) = \int_{-x}^{x-10} f(u)du = \int_0^{x-10} f(u)du - \int_0^{-x} f(u)du$$

Επειδή η f είναι συνεχής, η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, επομένως και οι συνθέσεις των $x - 10$ και $-x$ με την φ είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^{x-10} f(u)du\right)' = (x-10)' f(x-10) = f(x-10),$$

$$\left(\int_0^{-x} f(u)du\right)' = (-x)' f(-x) = -f(-x)$$

Επομένως η h είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x)$$

Επειδή, από το ερώτημα Δ1 $f(x) \le x+4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x) \le (x-10) + 4 + (-x) + 4 = -2 < 0$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως και 1–1, που σημαίνει ότι η ρίζα της είναι μοναδική. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

**Δ4.** Στο ερώτημα Δ1 δείξαμε ότι $f'(x) < 0$ στο $(x_0, +\infty)$ με $x_0 \in (-2, 0)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Είναι $|z+i| \ge 0$ και $|z| + 1 \ge 1 > 0$, αφού το μέτρο κάθε μιγαδικού είναι μη αρνητικός αριθμός. Τότε, με $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
f(|z+i|) \le f(|z|+1) &\Leftrightarrow |z+i| \ge |z| + 1 \\
&\Leftrightarrow |x + (y+1)i| \ge |x + iy| + 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \ge \sqrt{x^2 + y^2} + 1 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2 \ge \left(\sqrt{x^2 + y^2} + 1\right)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 \ge x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2} + 1 \\
&\Leftrightarrow y \ge \sqrt{x^2 + y^2} \\
&\Leftrightarrow y \ge 0 \ \text{ και } \ y^2 \ge \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow y \ge 0 \ \text{ και } \ x^2 \le 0 \\
&\Leftrightarrow y \ge 0 \ \text{ και } \ x = 0, \text{ άρα } z = iy, y \in \mathbb{R}^+, \text{ φανταστικός.}
\end{aligned}$$