

**ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 94.

**A.2.** Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2011) σελίδα 95 .

- A.3.** α) Σωστό  
β) Λάθος  
γ) Λάθος  
δ) Λάθος  
ε) Λάθος

**A.4.**

Αριθμός	Με μορφή λογαρίθμου	Με μορφή δύναμης
8	$\log_7 7^8$	$3^{\log_3 8}$
4	$\log_3 (3^4)$	$8^{2\log_8 2}$
2012	$\log 10^{2012}$	$e^{\ln 2012}$

**ΘΕΜΑ Β**

**B.1.** Έχουμε  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$  (1).

Επειδή όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$ , είναι το -1 ή το 1.

Το -1 δεν είναι ρίζα, γιατί  $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -4$ .

Ενώ το 1 είναι ρίζα, γιατί  $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 1 = 0$ .

Με εφαρμογή του σχήματος Horner έχουμε:

2	-3	0	1	ρ=1
↓	2	-1	-1	
2	-1	-1	0	

Η εξίσωση (1) είναι τώρα ισοδύναμη με την  $(x-1)(2x^2-x-1)=0$ .

Έτσι,  $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

ή  $2x^2-x-1=0$  με ρίζες  $x=1$  ή  $x=-\frac{1}{2}$  αφού  $\Delta=9$ .

Οι ρίζες λοιπόν της εξίσωσης (1) είναι  $x=-\frac{1}{2}$  ή  $x=1$  (διπλή).

**B.2.** Επειδή το  $\alpha=1$  είναι η διπλή ρίζα τότε:

$$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \eta$$

$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ . Όμοια, το  $\beta = -\frac{1}{2}$  είναι η άλλη ρίζα οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \eta \quad x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**B.3.** Επειδή η γραφική παράσταση της  $f$  δεν είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$  πρέπει:

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2-x-1) \leq 0$ . Το πρόσημο της  $f(x)$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$-1/2$	$1$	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$2x^2-x-1$	+	0	-	0
$f(x)$	-	0	+	0

Έτσι, οι τιμές των  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  δεν

βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$  είναι:  $x \leq -\frac{1}{2}$  ή  $x=1$ .

**B.4.** Έχουμε  $f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x)^2 + 1 = -2x^3 - 3x^2 + 1$ .

Εκτελούμε την ευκλείδεια διαίρεση, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 - 3x^2 + 0x + 1 & x^2 + 1 \\ \hline 2x^3 & + 2x \\ \hline -3x^2 + 2x + 1 & \\ \hline + 3x^2 & + 3 \\ \hline & 2x + 4 \end{array}$$

Το πηλίκο είναι:  $\pi(x) = -2x - 3$  και το υπόλοιπο:  $\upsilon(x) = 2x + 4$ .

Επομένως,  $f(-x) = (x^2 + 1)(-2x - 3) + (2x + 4)$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ.1.** Αφού  $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$  διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει:

$$2 \ln \beta = \ln \alpha + \ln \gamma \Leftrightarrow \ln \beta^2 = \ln(\alpha\gamma) \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma \quad (1).$$

Για την συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \stackrel{(1)}{=} \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2 < 0, \text{ αφού } \beta > 0.$$

Επειδή  $\alpha > 0$  και  $\Delta < 0$  είναι  $f(x) > 0$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

Έτσι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $h$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

**Γ.2 α)** Είναι  $\alpha_1 = \alpha = \ln e = 1, \alpha_2 = e^{\ln \beta} = \beta, \alpha_3 = 10^{\log \gamma} = \gamma$ .

Επειδή  $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$ , όπου  $\lambda$  ο λόγος της προόδου, τότε για  $n=5$  έχουμε  $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4$ . Έχουμε  $\alpha_5 = 256$  και  $\alpha_1 = 1$ , επομένως  $256 = 1 \cdot \lambda^4 \Leftrightarrow \lambda^4 = 4^4 \Leftrightarrow \lambda = 4$  ή  $\lambda = -4$ .

Επειδή  $\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta}{1} > 0$  τότε η τιμή  $\lambda = -4$  απορρίπτεται.

Για  $\lambda = 4$  έχουμε  $\beta = \alpha_1 \cdot \lambda = 4$  και  $\gamma = \beta \cdot \lambda = 4 \cdot 4 = 16$ .

Έτσι, λοιπόν  $\alpha = 1, \beta = 4$  και  $\gamma = 16$ .

**β)** Για  $\alpha = 1, \beta = 4, \gamma = 16$  είναι  $f(x) = x^2 + 4x + 16$  και  $g(x) = \eta \mu^2 x + 21$ .

Η εξίσωση  $f(\sin x) = g(x)$  είναι ισοδύναμη με την

$$\sin^2 x + 4 \sin x + 16 = \eta \mu^2 x + 21 \Leftrightarrow \sin^2 x + 4 \sin x - \eta \mu^2 x - 5 = 0 \quad (2).$$

Επειδή  $\eta \mu^2 x = 1 - \sin^2 x$  τότε από τη (2) έχουμε:

$$\sin^2 x + 4 \sin x - 1 + \sin^2 x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 4 \sin x - 6 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0 \quad (3).$$

Θέτουμε  $\sin x = y$  όπου  $-1 \leq y \leq 1$  οπότε η (3) γίνεται  $y^2 + 2y - 3 = 0$  με ρίζες  $y = 1$  ή  $y = -3$ . Η  $y = -3$  απορρίπτεται.

Για  $y = 1$  έχουμε:  $\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ .

Όμως,  $x \in (0, 4\pi] \Leftrightarrow 0 < x \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa \leq 2$ .

Ο  $\kappa$  είναι ακέραιος, οπότε  $\kappa = 1$  ή  $\kappa = 2$ .

Για  $\kappa = 1: x = 2\pi$  και για  $\kappa = 2: x = 4\pi$ .

**Γ.3.** Αφού  $\omega > 0$  τότε  $\beta_1 = 2\pi$  και  $\beta_2 = 4\pi$ . Η διαφορά είναι:  $\omega = \beta_2 - \beta_1 = 2\pi$ .

Ο νιοστός όρος της αριθμητικής προόδου  $(\beta_n)$  είναι:

$$\beta_n = \beta_1 + (n-1)\omega = 2\pi + (n-1)2\pi = 2n\pi.$$

Το άθροισμα των  $n$  πρώτων δίνεται από τον τύπο  $S_n = \frac{n}{2}(\beta_1 + \beta_n)$ .

Επειδή  $S_v = 2550\pi$  έχουμε:

$$2550\pi = \frac{v}{2}(2\pi + 2\pi v) \Leftrightarrow 2550\pi = v\pi(v+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(v+1) = 2550 \Leftrightarrow v^2 + v - 2550 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2550) = 10201 = 101^2$ .

$$\text{Έτσι, } v = \frac{-1+101}{2} = 50 \text{ ή } v = \frac{-1-101}{2} = -51.$$

Επειδή ο  $v$  είναι θετικός ακέραιος, τότε  $v = 50$ .

### ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Για να ορίζεται η  $g$  πρέπει να ισχύει  $x > 0$ .

Έτσι,  $A_g = (0, +\infty)$  (είναι  $\ln 2 \neq 0$  γιατί  $2 \neq 1$ )

Για να συγκρίνουμε  $g(3)$  και  $2$  βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς  $g(3) - 2$ .

$$\text{Είναι } g(3) - 2 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 2 = \frac{\ln 3 - 2\ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 3 - \ln 2^2}{\ln 2} = \frac{\ln 3 - \ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 2}.$$

Όμως  $\frac{3}{4} < 1$  άρα  $\ln \frac{3}{4} < 0$  και  $2 > 1$ , οπότε  $\ln 2 > 0$ .

Είναι  $g(3) - 2 < 0 \Leftrightarrow g(3) < 2$ .

Εναλλακτικά λύνουμε την

$$g(3) < 2 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2} < 2 \Leftrightarrow \ln 3 < 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 2^2 \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 4 \text{ η οποία}$$

αληθεύει, γιατί  $3 < 4$ .

Δ.2. Για να ορίζεται η  $f$  πρέπει  $2^x - 3 > 0$  και  $\ln(2^x - 3) \neq 0$ .

$$\text{Έχουμε } 2^x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 3 \Leftrightarrow \ln 2^x > \ln 3 \Leftrightarrow x \ln 2 > \ln 3 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$\text{και } \ln(2^x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow \ln(2^x - 3) \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2^x - 3 \neq 1 \Leftrightarrow 2^x \neq 4 \Leftrightarrow 2^x \neq 2^2 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Από το Δ1 είναι  $\frac{\ln 3}{\ln 2} < 2$ , οπότε  $A_f = (\frac{\ln 3}{\ln 2}, 2) \cup (2, +\infty)$ .

Δ.3. Είναι  $f(\log_2 \kappa) = \frac{1}{\ln(2^{\log_2 \kappa} - 3)} = \frac{1}{\ln(\kappa - 3)}$ , αφού  $2^{\log_2 \kappa} = \kappa$ .

$$\text{Έχουμε } f(\log_2 \kappa) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(\kappa-3)} < \frac{1}{2}.$$

Επειδή  $\kappa - 3 > 1$  ισχύει  $\ln(\kappa - 3) > 0$ .

$$\text{Οπότε } \ln(\kappa - 3) > 2 \Leftrightarrow \ln(\kappa - 3) > \ln e^2 \Leftrightarrow \kappa - 3 > e^2 \Leftrightarrow \kappa > 3 + e^2.$$

Τελικά  $\kappa \in (3 + e^2, +\infty)$ .

**Δ.4.** Το υπόλοιπο της διαίρεσης  $(-x^3 - 7x^2 + 6) : (x + 1)$

$$\text{είναι } v(x) = -(-1)^3 - 7(-1)^2 + 6 = 1 - 7 + 6 = 0.$$

$$\text{Έχουμε } v(x) = (f(\beta) - 1) \cdot x + g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \dots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2}.$$

Από την ισότητα των δύο πολυωνύμων έχουμε :

$$f(\beta) - 1 = 0 \text{ και } g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \dots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2} = 0.$$

Διαδοχικά έχουμε:

$$f(\beta) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(2^\beta - 3)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^\beta - 3) = \ln e \Leftrightarrow 2^\beta - 3 = e \Leftrightarrow 2^\beta = e + 3 \quad (1) \text{ και}$$

$$g(\alpha) + g(\alpha^2) + g(\alpha^3) + \dots + g(\alpha^{20}) - \frac{210}{\ln 2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\ln 2} + \frac{\ln \alpha^2}{\ln 2} + \frac{\ln \alpha^3}{\ln 2} + \dots + \frac{\ln \alpha^{20}}{\ln 2} = \frac{210}{\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2} (\ln \alpha + 2 \ln \alpha + 3 \ln \alpha + \dots + 20 \ln \alpha) = \frac{210}{\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\ln 2} (1 + 2 + 3 + \dots + 20) = \frac{210}{\ln 2} \quad (2).$$

Το  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20$  είναι άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής

$$\text{προόδου με } \alpha_1 = 1, \omega = 1. \text{ Έτσι, } S_{20} = \frac{20}{2} (\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10(1 + 20) = 210.$$

$$\text{Από τη (2) προκύπτει } \frac{210 \cdot \ln \alpha}{\ln 2} = \frac{210}{\ln 2} \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e \quad (3)$$

$$\text{Έτσι, έχουμε } e^{\beta \cdot \ln 2} = (e^{\ln 2})^\beta = 2^\beta \stackrel{(1)}{=} e + 3 = \alpha + 3 \stackrel{(3)}{=} e + 3.$$