



ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ. 152
- B. α) Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ 13
β) Θεωρία βιβλ. ΟΕΔΒ σελ 139
- Γ. α) ΣΩΣΤΟ
β) ΛΑΘΟΣ
γ) ΛΑΘΟΣ
δ) ΣΩΣΤΟ
ε) ΛΑΘΟΣ

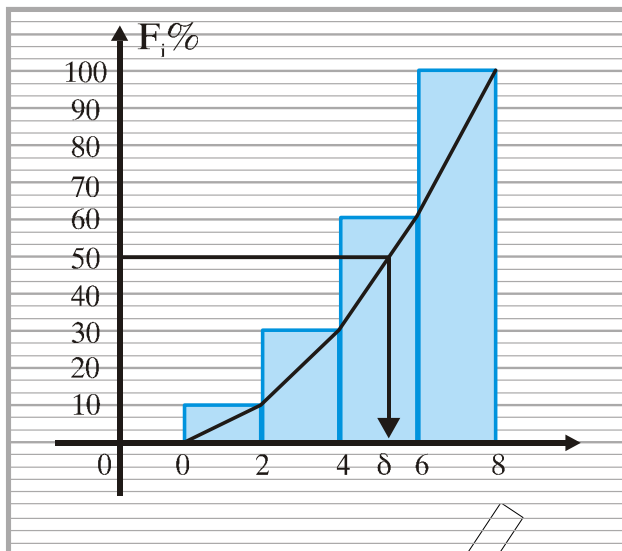
ΘΕΜΑ 2^ο

A)

[-)	x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i v_i$	$x_i^2 \cdot v_i$
[0 - 2)	1	2	10	10	2	2
[2 - 4)	3	4	20	30	12	36
[4 - 6)	5	6	30	60	30	150
[6 - 8)	7	8	40	100	56	392
Σύνολο		$v=20$	100		100	580

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{100}{20} = 5^\circ \text{C}$$

β)



η διάμεσος είναι περίπου 5

$$\gamma) \quad s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^4 x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^4 x_i v_i \right)^2}{v} \right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i^2 v_i - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{580}{20} - 5^2 = 29 - 25 = 4 \Rightarrow s = 2^\circ \text{C}$$

$$Cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ ή } 40\% > 10\% \text{ το δείγμα είναι ανομοιογενές.}$$

δ) Το πλήθος των πόλεων με θερμοκρασίες από 3°C έως και 7°C είναι οι μισές πόλεις της δεύτερης κλάσης, όλες της τρίτης και οι μισές της $4^{\text{ης}}$ διότι το 3 είναι το κέντρο της $2^{\text{ης}}$ και το 7 το κέντρο της $4^{\text{ης}}$ και οι παρατηρήσεις (πόλεις) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανομημένες μέσα στις κλάσεις. Άρα το ποσοστό είναι:

$$\frac{1}{2} 20\% + 30\% + \frac{1}{2} 40\% = 60\% \text{ των πόλεων.}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$, ισοπίθανα, $N(\Omega) = 25$

$$A = \{k \in \Omega / k \text{ πολ. στο } 3\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\} \quad N(A) = 8$$

$$B = \{k \in \Omega / \eta f \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες}\}$$

$$\text{Αφού } f(x) = x^2 - kx + 9 \text{ θα πρέπει } \Delta < 0 \Leftrightarrow k^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow (k-6)(k+6) < 0$$

Άρα $-6 < k < 6$. Επειδή όμως $k \in \Omega$ θα πρέπει $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ έτσι $N(B) = 5$

$$\Gamma = \left\{ k \in \Omega / \text{το } \lim_{x \rightarrow k} \frac{x^2 - kx}{\sqrt{x} - \sqrt{k}} \leq 16\sqrt{k} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{x^2 - \kappa x}{\sqrt{x} - \sqrt{\kappa}} &= \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{(x^2 - \kappa x)(\sqrt{x} + \sqrt{\kappa})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{\kappa})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{x(x - \kappa)(\sqrt{x} + \sqrt{\kappa})}{x - \kappa} = \lim_{x \rightarrow \kappa} x(\sqrt{x} + \sqrt{\kappa}) = 2\kappa\sqrt{\kappa} \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $2\kappa\sqrt{\kappa} \leq 16\sqrt{\kappa} \Leftrightarrow \kappa \leq 8$.

Επειδή $\kappa \in \Omega$ έχουμε $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Άρα $N(\Gamma) = 8$.

$$\beta) \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25} = 32\%$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25} = 32\%$$

$$\gamma) \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{25} = 20\%$$

$$A \cap B = \{3\} \quad \text{άρα } P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{25} = 4\%$$

$$\delta) \quad \bullet \quad P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{25} + \frac{8}{25} - \frac{1}{25} = \frac{12}{25} = 48\%$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(A \cup B') &= P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - [P(A) - P(A \cap B)] = \\ &= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= 1 - \frac{5}{25} + \frac{1}{25} = \frac{21}{25} = 84\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad P(B - A') &= P(B) - P(B \cap A') = P(B) - P(B - A) = \\ &= P(B) - P(B - A) = P(B) - P(B) + P(A \cap B) = \frac{1}{25} = 4\% \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ: Δεκτές είναι και οι λύσεις με την χρήση των διαγραμμάτων Venn

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Αφού η εφαπτομένη στο $K(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $(\delta): y = x + 1$ πρέπει $\lambda_{\varepsilon_K} = \lambda_{\delta} \Leftrightarrow f'(1) = 1$

$$\text{Έχουμε } f(x) = \frac{P(A \cup B)}{2[P(A) + P(B)]} \cdot x^2 + \frac{P(B - A)}{P(A) + P(B)}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} \cdot x \text{ οπότε}$$

$$f'(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} = 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Άρα $P(A \cap B) = 0$ και επειδή ο δ.χ. Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα θα είναι και $A \cap B = \emptyset$ δηλαδή τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

β) Αφού $\Lambda\left(0, \frac{1}{3}\right) \in C_f \Rightarrow f(0) = \frac{1}{3}$ όμως $f(0) = \frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)}$ οπότε

$$\frac{1}{3} = \frac{P(B-A)}{P(A)+P(B)} \Leftrightarrow 3P(B-A) = P(A)+P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3[P(B)-P(A \cap B)] = P(A)+P(B) \Leftrightarrow P(A) = 2P(B)$$

όμως

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) \Leftrightarrow 3P(B) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } P(A) = \frac{1}{2}.$$

γ) Έχουμε $g(x) = 6f(x) - 12x + 2019$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$g'(x) = 6f'(x) - 12 \text{ έτσι}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cup B)}{P(A) + P(B)} \cdot x = 2 \Leftrightarrow x = 2$$

(αφού $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$)

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 2 \Leftrightarrow x > 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Ο.Ε.

η g παρουσιάζει ελάχιστη τιμή για $x=2$ την $g(2) = 6f(2) - 24 + 2019$

όμως

$$f(2) = \frac{P(A \cup B)}{2[P(A) + P(B)]} \cdot 4 + \frac{P(B-A)}{P(A) + P(B)} = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ άρα } g(2) = 2009.$$

δ) Έχουμε $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ και $f'(x) = x$

Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εφαπτόμενη (ϵ_K) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Πρέπει $\alpha = f'(1) = 1$ άρα (ϵ_K): $y = x + \beta$

$$\text{Αφού } K(1, f(1)) \in C_f \Leftrightarrow f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{6}. \text{ Επομένως } \epsilon_K: \boxed{y = x - \frac{1}{6}}$$

$$\text{Είναι } M_i \in (\epsilon_K) \Leftrightarrow y_i = x_i - \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$\text{Άρα } \bar{y} = \bar{x} - \frac{1}{6} = -\frac{59}{6} - \frac{1}{6} = -10 \text{ και } s_y = s_x = 2 \text{ οπότε } CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{10} = 20\%$$