

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

20 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολ. βιβλίο σελ. 31.

A2. Λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, όταν και μόνον όταν το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

A3. Ορισμός, σχολ. βιβλίο σελ. 86-87.

A4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

## ΘΕΜΑ Β

B1. Το σύνολο λύσεων της εξίσωσης  $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$  είναι

$$\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}, \text{ με } \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

Επειδή  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$  έπεται  $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$  και επειδή οι πιθανότητες  $P(A \cap B)$ ,  $P(A)$ ,  $P(A \cup B)$  είναι διαφορετικές ανά δύο μεταξύ τους, προκύπτει ότι  $P(A \cap B) < P(A) < P(A \cup B)$

$$\text{Έτσι προκύπτει } P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{1}{2}.$$

B2.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}.$$

Για το ενδεχόμενο  $A' - B'$  είναι:

$$A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A.$$

$$\text{Άρα } P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Το ενδεχόμενο  $\Delta$  ισούται με  $(A \cap B)'$ , οπότε

$$P(\Delta) = P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

**B3.** Το ενδεχόμενο  $E$  ισούται με  $(A - B) \cup (B - A)$  οπότε

$$\begin{aligned} P(E) &= P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**B4.** Η εξίσωση  $9x^2 - 3x - 2 = 0$ , έχει ρίζες  $x_1 = \frac{2}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{3}$ . Άρα  $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$ .

Αν τα ενδεχόμενα  $B, \Gamma$  ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) \Leftrightarrow P(B \cup \Gamma) = \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \Leftrightarrow P(B \cup \Gamma) = \frac{13}{12} > 1, \text{ άτοπο.}$$

Άρα τα  $B, \Gamma$  δεν μπορεί να είναι ασυμβίβαστα.

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Από τα δεδομένα προκύπτει  $f_1 \% = 10$  και  $f_3 \% = 30$ . Επίσης είναι

$$f_3 = \frac{108}{360} = 0,3$$

Άρα  $f_3 \% = 30$

Τα κέντρα των κλάσεων είναι  $x_1 = 9, x_2 = 11, x_3 = 13, x_4 = 15, x_5 = 17$ .

Από τον τύπο  $\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot f_i$  προκύπτει

$$14 = 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14 = 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 + 9,9 \Leftrightarrow 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4,1 \quad (1)$$

Επίσης είναι

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \quad (2).$$

Από το σύστημα των (1), (2):  $\left. \begin{aligned} 11f_2 + 15f_4 &= 4,1 \\ f_2 + f_4 &= 0,3 \end{aligned} \right\}$  προκύπτει  $f_2 = 0,1$  και

$$f_4 = 0,2.$$

Άρα  $f_2 \% = 10$  και  $f_4 \% = 20$ .

Κλάσεις	$f_i$ %
[8, 10)	10
[10, 12)	10
[12, 14)	30
[14, 16)	20
[16, 18)	30

**Γ2.** Από τον τύπο  $S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s (x_i - \bar{x})^2 v_i$

$$\text{προκύπτει } S^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{v_i}{v} (x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow S^2 = \sum_{i=1}^5 f_i (x_i - \bar{x})^2.$$

$$\text{Έτσι } S^2 = f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + f_3 (x_3 - \bar{x})^2 + f_4 (x_4 - \bar{x})^2 + f_5 (x_5 - \bar{x})^2 =$$

$$= 0,1(9-14)^2 + 0,1(11-14)^2 + 0,3(13-14)^2 + 0,2(15-14)^2 + 0,3(17-14)^2 =$$

$$= 0,1 \cdot 25 + 0,1 \cdot 9 + 0,3 + 0,2 + 0,9 \cdot 9 = 2,5 + 0,9 + 0,3 + 0,2 + 2,7 = 6,6.$$

$$S^2 = 6,6 \quad \text{άρα} \quad S = \sqrt{6,6} \approx 2,57.$$

$$\text{Ισχύει ότι } CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} \approx 0,18 > 0,1.$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

**Γ3.** Ισχύει ότι  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 v_i \cdot x_i}{\nu} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i \cdot x_i + v_5 \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + f_5 \cdot \nu \cdot x_5}{\nu} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14 \cdot \nu = 1780 + 0,3 \cdot \nu \cdot 17 \Leftrightarrow 14 \cdot \nu - 5,1 \cdot \nu = 1780 \Leftrightarrow 8,9 \cdot \nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = \frac{1780}{8,9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu = 200$$

**Γ4.** Από την εφαρμογή της σελ 99 του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι αν δυο μεταβλητές  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $Y = aX + \beta$  όπου  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , τότε  $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$  και  $S_y = |a|S_x$ .

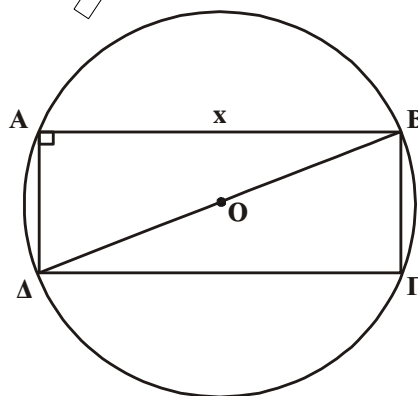
Από το δεδομένο  $\beta_i = \frac{a_i - \bar{a}}{S_a} \Leftrightarrow \beta_i = \frac{1}{S_a} a_i - \frac{\bar{a}}{S_a}$ , προκύπτει ότι οι μεταβλητές

$a, \beta$  συνδέονται με τη σχέση  $\beta = \frac{1}{S_a} a - \frac{\bar{a}}{S_a}$ .

$$\text{Άρα } \bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \bar{a} - \frac{\bar{a}}{S_a} = 0 \quad \text{και} \quad S_\beta = \left| \frac{1}{S_a} \right| S_a = \frac{1}{S_a} S_a = 1.$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**



Το τμήμα  $AB = x$ , είναι χορδή του κύκλου, άρα  $0 < x < 2 \cdot \rho \Leftrightarrow 0 < x < 10$ .

Η γωνία  $\Delta AB$  είναι ορθή, άρα η χορδή  $B\Delta$  είναι διάμετρος του κύκλου.

Έτσι από το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι  $AB = x$ ,  $B\Delta = 10$  και άρα  $A\Delta = \sqrt{10^2 - x^2} = \sqrt{100 - x^2}$ .

Το εμβαδό του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100 - x^2} \equiv f(x)$ .

**Δ2.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0,10)$  με

$$f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50} \text{ ή } x = -\sqrt{50}.$$

Επειδή  $x \in (0,10)$  προκύπτει  $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ .

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολής.

$x$	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'$		+	-
$f$		↑	↓

**τ. μέγιστο**

Συμπεραίνουμε ότι για την τιμή  $x = 5\sqrt{2}$  η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο. Για την τιμή αυτή είναι  $A\Delta = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$ , δηλ.  $A\Delta = AB$ , οπότε το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο.

**Δ3.** Παρατηρούμε ότι  $\sqrt{99} = 1 \cdot \sqrt{100 - 1^2} = f(1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Έτσι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} &= \frac{1}{98} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \\ &= \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{100 - 2 \cdot 1^2}{\sqrt{100 - 1^2}} = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}. \end{aligned}$$

**Δ4.** Είναι  $A - B \subseteq A$ , άρα  $P(A - B) \leq P(A)$  και επειδή  $P(A - B) > 0$ ,  $P(A) \leq 1$  είναι:  $0 < P(A - B) \leq P(A) \leq 1 < 5\sqrt{2}$ .

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 5\sqrt{2})$  άρα

$$\begin{aligned} f[P(A - B)] \leq f[P(A)] &\Leftrightarrow P(A - B) \sqrt{100 - P^2(A - B)} \leq P(A) \sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} &\leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} \quad (1). \end{aligned}$$

Είναι  $0 < P(A-B) \leq 1$ , άρα

$$P^2(A-B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-P^2(A-B) \geq -1 \Leftrightarrow 100 - P^2(A-B) \geq 99 \Leftrightarrow \sqrt{100 - P^2(A-B)} \geq \sqrt{99} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Επειδή  $0 < P(A) \leq 1$  και

$$0 < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}}, \text{ προκύπτει } 0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} \leq \frac{1}{\sqrt{99}} < 1.$$

$$\text{Τελικά } 0 < \frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}} < 1.$$

Όμως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 5\sqrt{2})$  άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$