

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΠΑ.Λ. Α' & Β'

21 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** (i) Τα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού της f .
(ii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f , στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f . Δηλαδή στα γωνιακά σημεία της f .
(iii) Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία υπάρχει η παράγωγος της f και είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή στα στάσιμα σημεία της f .

A2.



- A3.** α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\alpha}^{\beta} = \ln \beta - \ln \alpha = \ln \frac{\beta}{\alpha}$
β) $(c)' = 0$.
γ) $\bar{x} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \dots + \nu_k x_k}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k} = \frac{\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \dots + \nu_k x_k}{\nu}$

ΘΕΜΑ Β

B1.

Χρόνος σε λεπτά	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[5, 15)	10	20	20	200
[15, 25)	20	14	34	280
[25, 35)	30	12	46	360
[35, 45)	40	4	50	160
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		1000

B2. $\bar{x} = \frac{200 + 280 + 360 + 160}{50} = \frac{1000}{50} = 20$ λεπτά.

B3. $s^2 = \frac{\nu_1 (\kappa_1 - \bar{x})^2 + \nu_2 (\kappa_2 - \bar{x})^2 + \nu_3 (\kappa_3 - \bar{x})^2 + \nu_4 (\kappa_4 - \bar{x})^2}{50}$

$$= \frac{20(10-20)^2 + 14(20-20)^2 + 12(30-20)^2 + 4(40-20)^2}{50} =$$

$$= \frac{20 \cdot 100 + 14 \cdot 0 + 12 \cdot 100 + 4 \cdot 400}{50} = \frac{2000 + 1200 + 1600}{50} = \frac{4800}{50} = 96.$$

$$s = \sqrt{96} \approx 10.$$

B4. $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \approx \frac{10}{20} = 0,5 = 50\%.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x + 4e^{x-2}) = 8 + 4 = 12.$

Γ2. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{\lambda(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{\lambda} = \frac{12}{\lambda}.$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ αν και μόνον αν $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$

Δηλαδή $12 = \frac{12}{\lambda} = 12$ ή $12 = \frac{12}{\lambda}$. Άρα $\lambda = 1.$

Γ4. Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (4x + 4e^{x-2}) dx = 4 \int_1^2 x dx + 4 \int_1^2 e^{x-2} dx =$$

$$= 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + 4 \left[e^{x-2} \right]_1^2 = 4 \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) + 4(e^{2-2} - e^{1-2}) =$$

$$= 4 \cdot \frac{3}{2} + 4 \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 6 + 4 - \frac{4}{e} = 10 - \frac{4}{e}.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$B(t) = \frac{-t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15, \quad 0 \leq t \leq 10$$

Δ1. Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους B του παγόβουνου είναι:

$$B'(t) = -t^2 + 4t + 12, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Δ2. Λύνουμε την εξίσωση $B'(t) = 0$ στο διάστημα $0 \leq t \leq 10$ και έχουμε:

$$-t^2 + 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 12 = 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64, \quad t_1 = \frac{4-8}{2} = -2, \quad t_2 = \frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Από τον πίνακα μεταβολών βρίσκουμε ότι η B παρουσιάζει μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 6$ έτη.

t	0	6	10
B'(t)		+	⊖
B(t)		↗	↘

Δ3. Επειδή η B είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[6, 9]$ θα έχουμε:
 $6 \leq t \leq 9 \Rightarrow B(6) \geq B(t) \geq B(9)$.

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου δίνεται από την συνάρτηση:
 $g(t) = B'(t) = -t^2 + 4t + 12$ στο διάστημα $[0, 10]$
 Η πρώτη παράγωγος της g είναι $g'(t) = -2t + 4$, $t \in [0, 10]$.

Λύνουμε την εξίσωση $g'(t) = 0$ στο διάστημα $[0, 10]$ και έχουμε:

$$-2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Από τον πίνακα μεταβολών της g βρίσκουμε ότι αυτή παρουσιάζει μέγιστο την χρονική στιγμή $t = 2$ έτη.

t	0	2	10
g'(t)		+	⊖
g(t)		↗	↘