<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ</u>
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄
30 ΜΑΪΟΥ 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 30.
Α2. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 13.
Α3. Θεωρία, σελίδα σχολικού βιβλίου 59.
Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πλήθος των πωλητών της εταιρίας είναι: $\nu = 6 + 8 + 12 + 14 = 40$.

Β2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
[2,4)	3	12	0,30
[4,6)	5	8	0,20
[6,8)	7	14	0,35
[8,10)	9	6	0,15
Σύνολο		40	1

Είναι

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{12}{40} = 0,30$$

$$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{8}{40} = 0,20$$

$$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{14}{40} = 0,35$$

$$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{40} = 0,15$$

Β3. **α)** $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6}{40} = 5,7$ χιλιάδες ευρώ.

β) Επειδή οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες, το πλήθος των πωλητών που βρίσκονται στο διάστημα [4,5, 6) είναι $\frac{6-4,5}{6-4}\cdot 8 = \frac{1,5}{2}\cdot 8 = \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$.

Συνολικά, το ζητούμενο πλήθος πωλητών είναι: $6+14+6=26$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Είναι

$f'(x) = 12x^2 - 7x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{4}$ ή $x_2 = \frac{1}{3}$, αφού $x_1 < x_2$.

Ο πίνακας μεταβολής της f είναι ο ακόλουθος:

x	-∞ 1/4	1/3	+∞
f′	+	-	+
f	↗	↘	↗

Προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = \frac{1}{4}$ και

τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = \frac{1}{3}$.

Έτσι είναι $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$.

Επειδή Α, Κ, Π είναι ενδεχόμενα ασυμβίβαστα ανά δύο και $A \cup K \cup \Pi = \Omega$, ισχύει $P(A \cup K \cup \Pi) = P(\Omega) \Leftrightarrow P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow P(\Pi) = \frac{5}{12}$.

Γ2. Επειδή Α, Κ, Π είναι ασυμβίβαστα ανά δύο ενδεχόμενα ισχύει:

$$P(\Gamma) = P(A \cup K) = P(A) + P(K) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

$$P(\Delta) = P\left[\left(K \cup A\right)'\right] = 1 - P\left(K \cup A\right) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}.$$

$$\mathrm{P(E)=P(A\cup\Pi')=P(A)\cup P(\Pi')-P(A\cap\Pi')=P(A)+1-P(\Pi)-\big[P(A)-P(A\cap\Pi)\big]=}$$
$$=\frac{1}{3}+1-\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{7}{12}.$$

Γ3. Έστω ότι έχουμε Ν(Α) άσπρες μπάλες, Ν(Κ) κόκκινες μπάλες και Ν(Π) πράσινες μπάλες.
Αν Ν(Π)= x θα είναι $\mathrm{N(A)}=x-4$. Όμως

- $\mathrm{P(A)}=\dfrac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}}=\dfrac{x-4}{\mathrm{N(\Omega)}}=\dfrac{1}{3}$ οπότε, $3x-12=\mathrm{N(\Omega)}$ (1).
- $\mathrm{P(\Pi)}=\dfrac{\mathrm{N(\Pi)}}{\mathrm{N(\Omega)}}=\dfrac{x}{\mathrm{N(\Omega)}}=\dfrac{5}{12}$ οπότε, $12x=5\mathrm{N(\Omega)}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει $x=20$, $\mathrm{N(\Omega)}=48$
Άρα το δοχείο περιέχει συνολικά 48 μπάλες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω y dm η άλλη πλευρά της βάσης.

Αφού η βάση έχει σταθερή περίμετρο 20 dm είναι :

$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.

Η συνολική επιφάνεια του κουτιού είναι:

$E = x \cdot y + 2 \cdot 5y + 2 \cdot 5x = x\,(10 - x) + 10\,(10 - x) + 10x =$

$= 10x - x^2 + 100 - 10x + 10x = -x^2 + 10x + 100$.

Άρα $E(x) = -x^2 + 10x + 100$ με $x \in (0,10)$.

Είναι $E'(x) = -2x + 10$, $x \in (0,10)$.
Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	0		5		10
E΄		+	0	-	
E		↗		↘	

Άρα η E(x) παρουσιάζει μέγιστο για x = 5 dm.

Δ2. **α)** Αφού το δείγμα των τετμημένων x_i δεν είναι ομοιογενές θα ισχύει

$$C_v > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S}{8} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow S > \frac{4}{5}.$$

Από την εξίσωση $2S^2 - 5S + 2 = 0$ προκύπτει $S = 2$ ή $S = \frac{1}{2}$. Επειδή $S > \frac{4}{5}$ επιλέγουμε $S = 2$.

β) Η ζητούμενη μέση τιμή των x_i^2 είναι $\overline{x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15}$.

Ο τύπος $S^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right\}$ μετασχηματίζεται:

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{1}{\nu^2}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}\right)^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \bar{x}^2 =$$

$= \overline{x_i^2} - \bar{x}^2$ (1).

Η σχέση (1) για $\nu = 15$ και δεδομένου ότι $S = 2$, $\bar{x} = 8$ γίνεται:

$2^2 = \overline{x_i^2} - 8^2 \Leftrightarrow 4 = \overline{x_i^2} - 64 \Leftrightarrow \overline{x_i^2} = 68$, που είναι η ζητούμενη μέση τιμή.

Δ3. Η συνάρτηση $\mathrm{E}(x)$ στο διάστημα $[5, 10)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα αφού $5 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{15} = 9 \overset{E\downarrow}{\Rightarrow} \mathrm{E}(x_1) > \mathrm{E}(x_2) > \ldots . > \mathrm{E}(x_{15})$.

Άρα το εύρος των $\mathrm{E}(x_1)$, $\mathrm{E}(x_2)$, ... $\mathrm{E}(x_{15})$ είναι:

$R = \mathrm{E}(x_1) - \mathrm{E}(x_{15}) = \mathrm{E}(5) - \mathrm{E}(9) = 125 - 109 = 16$.

Είναι

$y_i > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow \mathrm{E}(x_i) > -4x_i + 9R + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 9\cdot 16 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x_i^2 + 14x_i - 45 > 0 \Leftrightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0$ (1).

Οι ρίζες του τριωνύμου $x_i^2 - 14x_i + 45$ είναι 5 και 9 και ο πίνακας προσήμων του είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$ 5	9	$+\infty$
$x^2-14x+45$	+	-	+

Άρα η (1) ισχύει όταν $5 < x_i < 9 \Rightarrow x_i \in \{x_2, x_3, \ldots\ldots, x_{14}\}$

Άρα το ενδεχόμενο Β είναι: $\mathrm{B} = \{A_2, A_3, \ldots\ldots, A_{14}\}$ ενώ $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{15}\}$.

Έτσι προκύπτει $\mathrm{P(B)} = \frac{\mathrm{N(B)}}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{13}{15}$.