

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία σελ. 334, σχολικού βιβλίου.  
A2. Θεωρία σελ. 247, σχολικού βιβλίου.  
A3. Θεωρία σελ. 222, σχολικού βιβλίου.  
A4. α)  $\rightarrow \Lambda$ , β)  $\rightarrow \Sigma$ , γ)  $\rightarrow \Sigma$ , δ)  $\rightarrow \Lambda$ , ε)  $\rightarrow \Sigma$ .

## ΘΕΜΑ Β

B1.

- Η δοσμένη σχέση γράφεται:  
 $|z-2|^2 + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$ .  
Αν  $|z-2| = y$  είναι  $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$  ή  $y = -2$ .  
Όμως  $y = |z-2| \geq 0$  άρα  $|z-2| = 1$ .  
Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(2, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .
  - Εξάλλου είναι  $|z| = |z-2+2| \leq |z-2| + |2| = 1+2 = 3$  άρα  $|z| \leq 3$ .
- Σημείωση: Η τελευταία ανίσωση μπορεί να προκύψει και γεωμετρικά.

B2. Είναι  $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta} i}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{4\gamma - \beta^2} i}{2}$ , οπότε

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow \left| \pm \frac{2\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1).$$

Επειδή  $z_{1,2}$  ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B1 είναι:

$$\left( \frac{\beta}{2} - 2 \right)^2 + \left( \pm \frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left( \frac{\beta}{2} + 2 \right)^2 + \frac{4\gamma - \beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4} + 2\beta + 4 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = -3 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει  $\beta = -4$  και  $\gamma = 5$ .

**(2ος τρόπος)**

Οι μιγαδικοί  $z_1, z_2$  είναι συζυγείς, άρα μπορούμε να θέσουμε  $z_1 = x + yi, z_2 = x - yi, x, y \in \mathbb{R}$ .

Η σχέση  $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$  γράφεται τώρα  $|2y| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$ .

Έτσι  $z_{1,2} = x \pm i$ . Επειδή  $z_{1,2}$  ανήκουν στον τόπο του ερωτήματος 1 είναι

$$\begin{aligned} |z_{1,2} - 2| = 1 &\Leftrightarrow |x \pm i - 2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (\pm 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \\ (x-2)^2 + 1 &= 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Έτσι όμως  $z_{1,2} = 2 \pm i$ . Από τις σχέσεις του Vieta προκύπτουν:

$$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow 4 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4.$$

$$z_1 \cdot z_2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5.$$

**B3.** Έστω  $|v| \geq 4$ . Έχουμε  $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$ .

$$\text{Άρα } |v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|.$$

$$\begin{aligned} \text{Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι } |v|^3 &= |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = \\ &= |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|. \end{aligned}$$

Από  $B_1$  είναι  $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$ , άρα

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1).$$

$$\text{Η τελευταία γράφεται } |v|^3 \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \text{ (είναι } |v| - 1 > 0 \text{ αφού } |v| \geq 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3.$$

$$\text{Όμως } 4 \cdot |v|^3 - 3 < 4 \cdot |v|^3 \text{ άρα } |v|^4 < 4 \cdot |v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα  $|v| < 4$ .

**(2ος τρόπος)**

$$\text{Είναι } v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0.$$

$$\text{Άρα } |v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|.$$

$$\begin{aligned} \text{Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι } |v|^3 &= |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = \\ &= |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|. \end{aligned}$$

Από το  $B_1$  είναι  $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$ , άρα

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1). \text{ Δηλαδή } |v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \quad (1).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α)  $|v| = 1$ , τότε  $|v| < 4$  και ισχύει το ζητούμενο.

β)  $|v| \neq 1$ , τότε η (1) γράφεται:  $|v|^3 \leq \frac{3(|v|^3 - 1)}{|v| - 1}$  (2).

β<sub>1</sub>) Αν  $|v| < 1$ , τότε  $|v| < 4$  και ισχύει το ζητούμενο.

β<sub>2</sub>) Αν  $|v| > 1$ , τότε η (2) γράφεται  $|v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3$ .

Όμως  $4|v|^3 - 3 < 4|v|^3$ , άρα  $|v|^4 < 4|v|^3$  και επειδή  $|v| > 1$ , προκύπτει  $|v| < 4$ .

### (3ος τρόπος)

Από τη δοσμένη σχέση, όπως δείχτηκε και στον 2ο τρόπο προκύπτει:

$$|v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^3 - 4|v|^2 + |v|^2 - 4|v| + |v| - 4 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^2 (|v| - 4) + |v| (|v| - 4) + (|v| - 4) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) \leq -1 < 0.$$

Όμως  $|v|^2 + |v| + 1 > 0$ , άρα  $|v| - 4 < 0 \Leftrightarrow |v| < 4$ .

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για  $x \in \mathbb{R}$  η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(f(x) + x)(f(x) + x)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \left[\frac{(f(x) + x)^2}{2}\right]' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Για  $x = 0$ ,  $\frac{1}{2} = c$ .

Έτσι  $\frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + 1$ .

Θέτουμε  $g(x) = f(x) + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Είναι  $g(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x)$  συνεχής στο

$\mathbb{R}$  άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή  $g(0) = f(0) > 0$  θα είναι  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , δηλαδή  $f(x) + x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άρα  $f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Γ2. Είναι  $f(g(x)) = \sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1$ .

Άρα  $\sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + 1} = g(x) + 1$  (1).

$$\text{Πρέπει } g(x)+1 > 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2 \left( x + \frac{3}{2} \right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left( -\frac{3}{2}, 0 \right) \cup (0, +\infty).$$

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$g^2(x)+1 = g^2(x)+1+2g(x) \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $\varphi'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$ .

Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	+	0	-	0	+
$\varphi(x)$					

Προκύπτει τοπικό μέγιστο  $\varphi(-1) = -1$  και τοπικό ελάχιστο  $\varphi(0) = -2$ . Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της  $\varphi$  για  $x \in [0, +\infty)$  είναι το  $[-2, +\infty)$ , ενώ για  $x < 0$  είναι  $\varphi(x) < 0$ .

Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την  $\varphi$  στο  $(0, +\infty)$  και επειδή η  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

### (2ος τρόπος)

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Επίσης είναι  $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα

$f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Έτσι όμως  $f'(x) < 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  και άρα 1-1.

Η εξίσωση τώρα  $f(g(x)) = 1$  γράφεται  $f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0.$$

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$   $x \in \mathbb{R}$ .

Ο πίνακας μεταβολών της  $g$  είναι:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$ ,  $g(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  $g$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -1]$ , άρα  $g((-\infty, -1]) = (-\infty, -\frac{1}{2}]$ . Άρα η  $g$  δεν έχει ρίζα  $(-\infty, -1]$ .
- $g(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  $g(0) = -1$  και  $g$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 0]$ , άρα  $g([-1, 0]) = [-1, -\frac{1}{2}]$ . Άρα η  $g$  δεν έχει ρίζα  $[-1, 0]$ .
- $g(0) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$ ,  $g$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , άρα  $g([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$ .

Παρατηρούμε ότι  $0 \in g([0, +\infty))$ , άρα υπάρχει  $x_0 \in (0, +\infty)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ , που είναι και μοναδική αφού  $g$  είναι γνησίως αύξουσα.

**Γ3.** Θέτουμε  $K(x) = \int_{x-\pi/4}^0 f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\phi x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Η  $K$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , ενώ επειδή  $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t > 0$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$

θα είναι  $\int_{-\pi/4}^0 f(t)dt > 0$ , δηλαδή  $K(0) > 0$ .

Επίσης είναι  $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) \cdot \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} = -1 < 0$ .

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  τέτοιο ώστε  $K(x_0) = 0$  ή  $\int_{x_0-\pi/4}^0 f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\phi x_0$ .

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ 5 \cdot \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] =$$

$$= 5f'(1) - f'(1) = 4f'(1).$$

διότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} \cdot 5 \stackrel{5h=u}{=} 5 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = 5f'(1).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \stackrel{-h=t}{=} -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = -f'(1).$$

Άρα αφού

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow 4f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

Για  $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$ .

Για  $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$ .

Άρα η  $f$  είναι  $\downarrow$  στο  $(0,1]$  και  $\uparrow$  στο  $[1,+\infty)$  με  $f'(1) = 0$  άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x=1$ .

**Δ2.** Η συνάρτηση  $\frac{f(t)-1}{t-1}$  συνεχής στο  $(1,+\infty)$  άρα η  $g$  παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}, \quad x \in (1,+\infty).$$

Λόγω του  $\Delta_1$ , αφού στο  $x_0 = 1$  η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο, είναι  $f(x) \geq f(1) = 1$  για κάθε  $x \in (0,+\infty)$ .

Η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 1$ , άρα  $f(x) > 1$  για  $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ .

Έτσι  $f(x) - 1 > 0$  για  $x \in (1,+\infty)$  και  $x - 1 > 0$ , άρα  $g'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (1,+\infty)$ .

Άρα  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $(1,+\infty)$ .

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση  $\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u) du$ ,  $x \in (1,+\infty)$ .

Είναι  $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$ .

Όμως  $x < x+1$  και επειδή  $g$  γνησίως αύξουσα θα είναι  $g(x) < g(x+1)$ ,

άρα  $\varphi'(x) > 0$ , άρα  $\varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $(1,+\infty)$ .

Είναι  $8x^2 + 5 > 1$  και  $2x^4 + 5 > 1$ , οπότε η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \varphi(8x^2 + 5) > \varphi(2x^4 + 5) &\Leftrightarrow 8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2). \end{aligned}$$

**Δ3.** Είναι  $g''(x) = \frac{(f(x)-1)'(x-1) - (f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)'}{(x-1)^2}$ .

Για την  $f$  στο  $[1, x]$  ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (1, x) : \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \Rightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} = f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = (x-1)f'(\xi).$$

$$\text{Άρα } g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1}.$$

Είναι  $\xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$ .

Επίσης για  $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ .

Έτσι  $g''(x) > 0$  για κάθε  $x > 1$  άρα  $g$  κυρτή στο  $(1,+\infty)$ .

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την  $g$  στο  $x = a$  είναι

$$y - g(a) = g'(a)(x-a) \Leftrightarrow y = g'(a)(x-a).$$

Αφού  $g$  κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή  $g(x) \geq y \Rightarrow g(x) \geq g'(a)(x-a)$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = a$ .  
 Άρα η εξίσωση  $g(x) = g'(a)(x-a)$  έχει μοναδική λύση  $x = a$ .

**(2ος τρόπος)**

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:  $(a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt - (f(a)-1)(x-a) = 0, \quad x > 1.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = (a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt - (f(a)-1)(x-a), \quad x > 1.$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = (a-1) \frac{f(x)-1}{x-1} - (f(a)-1) = (a-1) \left[ \frac{f(x)-1}{x-1} - \frac{f(a)-1}{a-1} \right] = (a-1)(g'(x) - g'(a)).$$

Η  $g$  είναι κυρτή άρα η  $g'$  γίνεται αύξουσα και επομένως

- με  $x < a \Rightarrow g'(x) < g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0.$
- με  $x > a \Rightarrow g'(x) > g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0.$
- $h'(a) = 0.$

Άρα προκύπτει ότι η  $h$  έχει ελάχιστη τιμή στη θέση  $x_0 = a$ , την  $h(a) = 0$  που συνακόλουθα είναι και μοναδική.

