ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 16 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 60

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65

Α4.
1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Σ
5. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \\ f'(x) = 3\kappa^2x^2 - 18\kappa x + 15 \end{cases} \Rightarrow \kappa^2 - 18\kappa + 45 = 0 \Rightarrow \kappa = 3 \text{ ή } 15$$

Β2. $f(x) = 9x^3 - 27x^2 + 15x + 3$ και

$f'(x) = 27x^2 - 54x + 15 = 3(9x^2 - 18x + 5)$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=\tfrac{1}{3} \text{ ή } \tfrac{5}{3} \text{ άρα:}\begin{cases} f'(x)>0 \text{ για } x\epsilon\left(-\infty,\frac{1}{3}\right), \text{άρα } f\nearrow(-\infty,\frac{1}{3}] \\ f'(x)<0 \text{ για } x\epsilon\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right), \text{άρα } f\searrow[\frac{1}{3},\frac{5}{3}] \\ f'(x)>0 \text{ για } x\epsilon\left(\frac{5}{3},+\infty\right), \text{άρα } f\nearrow[\frac{5}{3},+\infty) \end{cases}$$

Επομένως η f έχει τοπικό μέγιστο στο $\frac{1}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{5}{3}$.

Το τοπικό μέγιστο είναι το $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}$ και το τοπικό ελάχιστο είναι το $f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{184}{3}$.

Β3. $y=\lambda x+\beta \Rightarrow \begin{cases} x=0, y=f(0), \lambda=f'(0)=15 \\ 3=15\cdot 0+\beta \end{cases} \Rightarrow \beta=3$

Επομένως $y=15x+3$

Τομή x΄x: $0=15x+3 \Rightarrow x=-\frac{1}{5}$ άρα έχουμε το σημείο $A(-\frac{1}{5},0)$

Τομή y΄y: $y=15\cdot 0+3=3$ άρα $B(0,3)$

Β4. $f''(x)=54x-54$ και $f(0)=3$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f''(x)-18f(0)}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{54x-54-18\cdot 3}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{54x-108}{\sqrt{x+2}-2}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{54(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{54(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)}=54\cdot 4=216$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f(x) είναι συνεχής θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=v^2-40v+401$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)+x-1}{(x-1)(x+1)}=v^2-40v+401 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=v^2-40v+401$

$\Leftrightarrow 1=v^2-40v+401 \Leftrightarrow v^2-40v+400=0 \Leftrightarrow (v-20)^2=0 \Leftrightarrow v=20$

Γ2. **Ι.** Έχουμε: $\alpha=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3x-9}=\alpha=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{3(x-3)}=2$

ΙΙ. Έχουμε: $\beta=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=4+4+4=12$

ΙΙΙ. Έχουμε: $\gamma=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-10\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-10\eta\mu^2x}{-\eta\mu^2x}=10$

Γ3. **Ι.** Έχουμε: $\delta = \lim\limits_{x\to 0} 15\frac{\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0} 15\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{\eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0} 15\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 15$

ΙΙ. Έχουμε: $\varepsilon = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}{x-2} = 2\left(2+\frac{1}{2}\right) = 4+1 = 5$

Γ4. Έχουμε: $N_1=2$ και $f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu}100 = \frac{2}{20}100 = 10$

$\nu_2 = N_2 - \nu_1 = 12 - 2 = 10$ άρα $f_2\% = \frac{\nu_2}{\nu}100 = \frac{10}{20}100 = 50$

$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu}100 \Leftrightarrow 10 = \frac{\nu_3}{20}100 \Leftrightarrow \nu_3 = 2$ άρα $N_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 2 + 10 + 2 = 14$

$N_4 = \nu_4 + N_3 \Leftrightarrow 15 = \nu_4 + 14 \Leftrightarrow \nu_4 = 1$ άρα $f_4\% = \frac{\nu_4}{\nu}100 = \frac{1}{20}100 = 5$

$f_5\% = \frac{\nu_5}{\nu}100 \Leftrightarrow 5 = \frac{\nu_5}{20}100 \Leftrightarrow \nu_5 = 1$ άρα $N_5 = \nu_5 + N_4 = 1 + 15 = 16$

$N_5 + \nu_6 = 20 \Leftrightarrow 16 + \nu_6 = 20 \Leftrightarrow \nu_6 = 4$ άρα $f_6\% = \frac{\nu_6}{\nu}100 = \frac{4}{20}100 = 20$

Αριθμός λογαριασμών σε κοινωνικά δίκτυα x_i	Αριθμός μαθητών ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
0	$\alpha=\nu_1=2$	$N_1=2$	$f_1=10$
1	$\nu_2=10$	$\beta=N_2=12$	$f_2=50$
2	$\nu_3=2$	$N_3=14$	$\gamma=f_3=10$
3	$\nu_4=1$	$\delta=N_4=15$	$f_4=5$
4	$\nu_5=1$	$N_5=16$	$\varepsilon=f_5=5$
5	$\nu_6=4$	$\nu=20$	$f_6=20$
Σύνολο	$\nu=20$		100

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x^2+y^2=3^2 \Leftrightarrow y^2=9-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{9-x^2}$

Δ2. $\begin{cases} y(t_o)=\sqrt{9-x^2(t_o)} \\ x(t_o)=2 \end{cases} \Rightarrow y(t_o)=\sqrt{5}\text{m}$

Δ3. $x^2(t)+y^2(t)=9 \Rightarrow 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \overset{t=t_o}{\Rightarrow}$

$$\begin{cases} 2x(t_o)x'(t_o)+2y(t_o)y'(t_o)=0 \\ x(t_o)=2, y(t_o)=\sqrt{5}\text{m}, y'(t_o)=\sqrt{5}\text{m/s} \end{cases} \Rightarrow x'(t_o)=-\frac{5}{2}\text{m/s}$$

Δ4. **I.** $E(x)=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}$

II. $E'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{2}x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)=\frac{9-x^2-x^2}{2\sqrt{9-x^2}}=\frac{9-2x^2}{2\sqrt{9-x^2}}$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow 9-2x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (δεκτό το $+\frac{3\sqrt{2}}{2}$)

$E'(x)>0 \Leftrightarrow x\epsilon\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ άρα $E\uparrow[0,\frac{3\sqrt{2}}{2}]$

$E'(x)<0 \Leftrightarrow x\epsilon\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},3\right)$ άρα $E\downarrow[\frac{3\sqrt{2}}{2},3]$

'Αρα έχουμε μέγιστο στο $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

III. $\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{5} \overset{\eta\mu x \uparrow [0,\frac{\pi}{2}]}{\Longrightarrow} \eta\mu\left(\frac{\pi}{18}\right)<\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)\leq 1<\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \eta\mu x\leq 1$

Έχουμε: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{18}\right)<\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right) \overset{E\uparrow[0,\frac{3\sqrt{2}}{2}]}{\Longrightarrow} E\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)<E\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$