

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

**α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;  
(Μονάδες 2)

**β) i.** Πότε μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  έχει αντίστροφη;  
(Μονάδα 1)

**ii.** Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ ;  
(Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. **Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.**

**α)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  με  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in A$ , ισχύει ότι η  $f$  είναι σταθερή στο  $A$ .

(Μονάδα 1 για το ν χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

**β)** Για κάθε συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , όταν υπάρχει το όριο της  $f$  καθώς το  $x$  τείνει στο  $x_0 \in A$ , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της  $f$  στο  $x_0$ .

(Μονάδα 1 για το ν χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος  
Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

**Μονάδες 8**

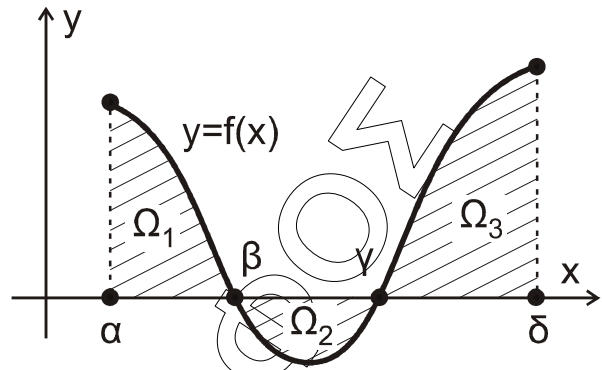
**A5.** Έστω η συνάρτηση  $f$  του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων

$\Omega_1, \Omega_2$  και  $\Omega_3$  ισχύει ότι

$E(\Omega_1) = 2, E(\Omega_2) = 1$  και  $E(\Omega_3) = 3,$

τότε το  $\int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx$  είναι ίσο με:



α) 6

β) -4

γ) 4

δ) 0

ε) 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^{-x} + \lambda$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία  $y = 2$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

**Μονάδες 3**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) - x = 0$  έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(2, 3)$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**B4.** Έστω  $f^{-1}(x) = -\ln(x-2), x > 2$ . Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1. \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 1$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 4**

**Γ3. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$ , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

**ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$  είναι αδύνατη στο  $(x_0, +\infty)$ .

(Μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Ένα σημείο  $M(x, y)$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq 1$ . Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία το σημείο  $M$  διέρχεται από το σημείο  $A(3, 10)$ , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου

$\triangle MOK$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , όπου  $K(x, \theta)$  και  $O(0, 0)$ .

**Μονάδες 8**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = -x + 2$ , η οποία εφαπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο της  $A(1, 1)$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -1$  και  $\beta = 2$ .

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την ευθεία  $(\varepsilon)$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = 2$ .

**Μονάδες 5**

**Δ3. i.** Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \geq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 3)

**ii.** Να αποδείξετε ότι  $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 5)

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = -x^3 - x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

**Μονάδες 8**