<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α**. Ορισμός, σελίδα σχολικού βιβλίου 15.

β. **i.** Η συνάρτηση έχει αντίστροφη όταν είναι 1–1 στο Α.

ii. Είναι η συνάρτηση $g: f(A) \to \mathbb{R}$ με την οποία για κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή g συμβολίζεται f^{-1}.

Α2. Θεώρημα Fermat, σελίδα σχολ. βιβλίου 142.

Α3. Θεώρημα, σελίδα σχολ. βιβλίου 135.

Α4. **α**. Λάθος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{Bmatrix} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{Bmatrix}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Α4. **β)** Λάθος. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \neq f(0) = 1$

Α5. **γ.**

ΘΕΜΑ Β

B1. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2.$

B2. Έστω συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in[2,3]$.
Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [2, 3], ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

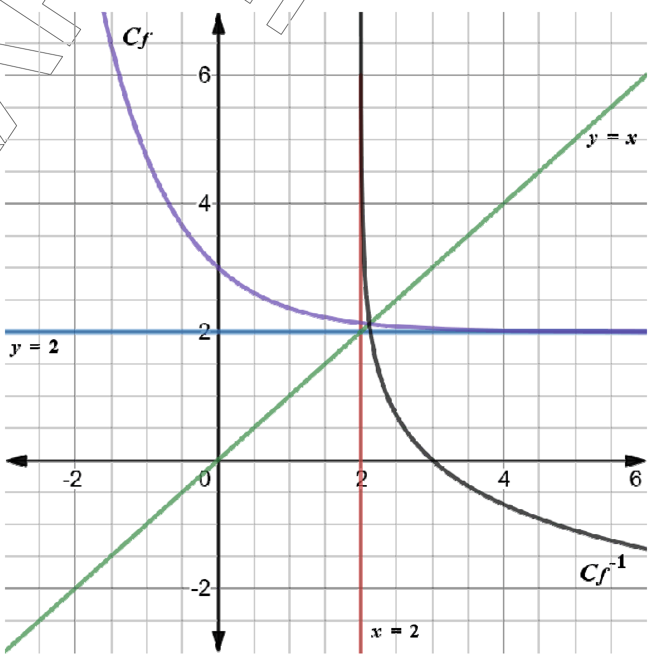
$$\left.\begin{array}{l} g(2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0 \\ g(3)=e^{-3}-3+2=\dfrac{1}{e^3}-1=\dfrac{1-e^3}{e^3}<0 \end{array}\right\} g(2)\cdot g(3)<0.$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.
Επίσης $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1–1, οπότε η x_0 είναι μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

B3. $f'(x)=-e^{-x}<0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1–1, άρα αντιστρέφεται.
$y=f(x) \Leftrightarrow y=e^{-x}+2 \Leftrightarrow y-2=e^{-x} \underset{y>2}{\Leftrightarrow} \ln(y-2)=-x \Leftrightarrow x=-\ln(y-2) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-2),\quad y>2$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\quad x>2$.

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=-\infty$, αφού εάν θέσουμε $x-2=u$ όταν $x\to2^+ \Rightarrow u\to0^+$.
Άρα $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]=-\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2)=-\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=+\infty$ διότι $\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$.
Άρα η $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ ως παραγωγίσιμη.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1+\beta=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\underset{(D.L.H)}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}=$$
$$=\beta+1.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}=2$$

Επειδή η *f* είναι παραγωγίσιμη στο 1, πρέπει $\beta+1=2$, άρα $\beta=1$, οπότε και $\alpha=1$.

Γ2. Για $x>1$, $f'(x)=2x>0$ (1)

για $x<1$, $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ (2)

και f συνεχής στο 1. (3)

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x)=-\infty$

Άρα $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Γ3. **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **.**Άρα υπάρχει $\kappa\in(-\infty,0)$ ώστε $f(\kappa)<0$, ενώ $f(0)=e^{-1}=\frac{1}{e}>0$

Επίσης η f είναι συνεχής στο R άρα και στο [κ, 0], άρα από Θεώρημα Bolzano στο $[\kappa,0]$, υπάρχει $x_0\in(\kappa,0)$ ώστε $f(x_0)=0$. Η x_0 είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της *f*.

ii. $f^2(x)-x_0 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\cdot(f(x)-x_0)=0$ (1)

Ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>x_0$, άρα η (1) στο $(x_0,+\infty)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)-x_0=0 \Leftrightarrow f(x)=x_0$.

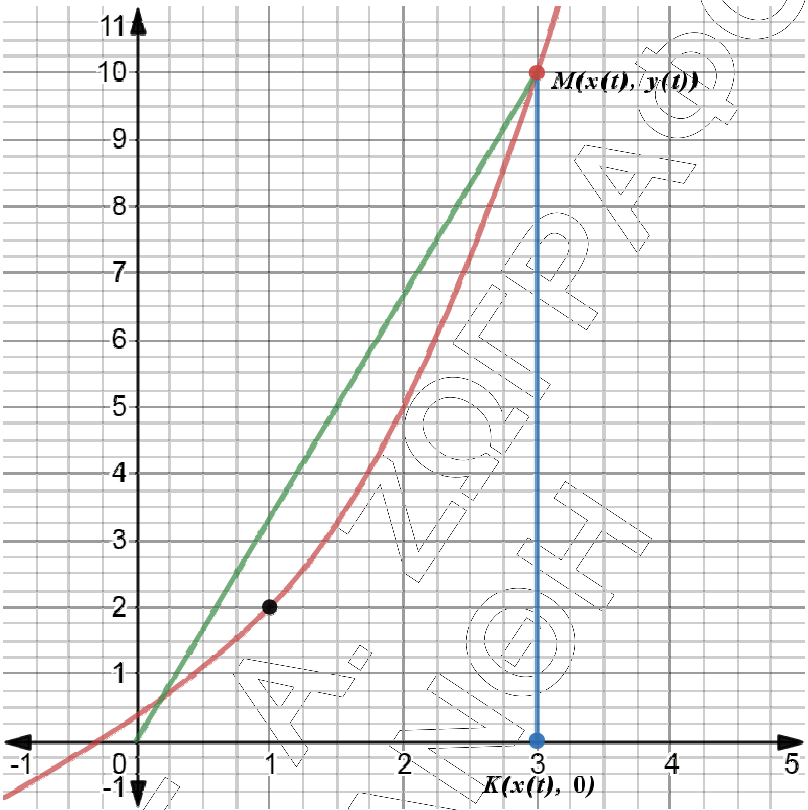
Η τελευταία είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$ διότι αφού η είναι *f* γνησίως αύξουσα, από $x>x_0$ έπεται $f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$ ενώ $x_0<0$.

Γ4. $M\left(x(t), y(t)\right) \Rightarrow y(t) = x^2(t) + 1$

$x(t_0) = 3$

$y(t_0) = 10$

$x'(t_0) = 2$



$E(t) = \frac{1}{2}x(t)y(t) \Rightarrow$

$E'(t) = \frac{1}{2}x'(t)y(t) + \frac{1}{2}x(t)y'(t) \overset{t=t_0}{\Rightarrow}$

$E'(t_0) = \frac{1}{2}x'(t_0)y(t_0) + \frac{1}{2}x(t_0)y'(t_0)$.

Ισχύει: $y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Άρα $E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 28$ τμ/s.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)+\alpha x+\beta$

$\varepsilon: y=-x+2$

$f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1$

$f'(1)=-1$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

$f'(1)=-1\Leftrightarrow \boxed{a=-1}$ και $\boxed{\beta=2}$

Δ2 $f(x)=(x-1)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$ Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1,2]$

$$\mathrm{E}=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\cancel{-x}\cancel{+2}\cancel{+x}\cancel{-2}\right|\mathrm{d}x=$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+1+1)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left|(x-1)\ln[(x-1)^2+1)]\right|\mathrm{d}x$$

Για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $(x-1)\geq 0,\ \ln[(\chi-1)^2+1]\geq \ln 1=0$.

Έστω $u=x^2-2x+2\Leftrightarrow \mathrm{d}u=(2x-2)\mathrm{d}x\Leftrightarrow$

$\mathrm{d}u=2(x-1)\mathrm{d}x\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u=(x-1)\mathrm{d}x$

Για $x=1\Rightarrow u_1=1$

Για $x=2\Rightarrow u_1=2$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 1\cdot\mathrm{d}u=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\ln 2\right)-\frac{1}{2}\cdot 1=\ln 2-\frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Δ3. **i.** Είναι $f'(x)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1,\quad x\in\mathbb{R}$

Προφανώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, επομένως

$$\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1\geq -1\Leftrightarrow f'(x)\geq -1,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

ii. Είναι για $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\quad (1).$$ Αρκεί επομένως να δειχθεί η (1).

Θεωρώντας τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}.$$ Όμως από Δ3 (i), είναι $f'(\xi)\geq -1$.

Άρα $\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$. Αποδείχθηκε η (1) και ισοδύναμα η αρχική.

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-3x^2-1$.

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτόμενη, αν και μόνον υπάρχουν σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$, ώστε να ταυτίζονται οι ευθείες :

y= $f'(x_1)(x-x_1)+f(x_1)\Leftrightarrow y=f'(x_1)\cdot x+f(x_1)-f'(x_1)\cdot x_1$ και

y = $g'(x_2)(x-x_2)+g(x_2)\Leftrightarrow y=g'(x_2)\cdot x+g(x_2)-g'(x_2)\cdot x_2$

Για να ταυτίζονται οι δύο αυτές ευθείες έπεται ότι αναγκαία θα πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$ (Να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης).

Είναι όμως:

- $f'(x_1)\geq -1,\ x_1\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_1=1$ (από **Δ3.i.**)
- $g'(x_2)\leq -1,\ x_2\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_2=0$

Οπότε $f'(x_1)\geq g'(x_2)$ για κάθε ζεύγος (x_1,x_2), με την ισότητα $f'(x_1)=g'(x_2)$ να ισχύει αποκλειστικά και μόνον για $x_1=1$ και $x_2=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι $y=-x+2$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(0,2)$ είναι $y-2=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+2$.

Άρα η ε μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στα σημεία τους A, B αντίστοιχα.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ ΣΕ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ :

Γ3. i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[1,+\infty)$ άρα :

$f((-\infty,1])=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)]=(-\infty,2]$.

$f([1,+\infty))=(f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)]=[2,+\infty)$.

Από τα επιμέρους σύνολα τιμών προκύπτει ότι υπάρχει x_0 στο διάστημα $(-\infty,1]$ ώστε $f(x_0)=0$. Ισοδύναμα $e^{x_0-1}+x_0=0$. Δηλαδή $x_0=-e^{x_0-1}<0$.

Δ3. i. Υπολογίζοντας τη δεύτερη παράγωγο της f έχουμε :

$$f^{\prime\prime}(x)=\frac{2\left(x-1\right)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{2\left(x-1\right)(x^2-2x+1+3)}{(x^2-2x+1+1)^2}=\frac{2\left(x-1\right)[(x-1)^2+3)]}{[(x-1)^2+1]^2},\ x\in\mathbb{R}$$

Προφανώς είναι $f^{\prime\prime}(x) > 0$ για κάθε x ϵ (-∞,1) και $f^{\prime\prime}(x) < 0$ για κάθε x ϵ (1,+∞) με την ισότητα να ισχύει για x=1.

Άρα η $f^{\prime}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,1] και γνησίως αύξουσα στο [1,+∞).

Κατά συνέπεια η $f^{\prime}$ παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) για x_0 =1, οπότε $f^{\prime}(x) \geq f^{\prime}(1)=-1$.

Δ3. ii. Η προς απόδειξη ανίσωση ισοδυναμεί με την $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f\left(\lambda\right)-\frac{1}{2}$ (1).

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq f\left(\lambda\right)+\lambda\Leftrightarrow g(\lambda+\frac{1}{2})\geq g(\lambda)$ (2).

όπου g(x) = f(x) +x.

Όμως για κάθε x ϵ (-∞,1)∪(1,+∞) είναι $g'(x)=f^{\prime}(x)+1>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε η (2) ισοδύναμα γράφεται $\lambda+\frac{1}{2}\geq\lambda$ που ισχύει.