

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ .  
Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και
- $f(a) \neq f(\beta)$ ,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(a)$  και  $f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση  $f$ , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f'(x) > 0$ ».

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$ , για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$ .

**β)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$ , αντίστοιχα, τότε η  $g \circ f$  ορίζεται, αν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

**δ)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

**ε)** Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  παραγωγίζεται στο  $\mathbb{R}$  και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα  $x'x$ . Αν υπάρχει κάποιο σημείο

$A(x_0, f(x_0))$  της  $C_f$ , του οποίου η απόσταση από τον άξονα  $x'x$  είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της  $C_f$  είναι οριζόντια.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν  $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ , με  $x > 0$ , αποδείξτε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι '1-1' και βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν  $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ , με  $x > 1$ , να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**B4.** Αν  $\varphi$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \mu x + \lambda \sin x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad \text{με } \lambda > 0$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, 1)$ , η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 6**

- Γ4.** Ένα σημείο  $M(a, f(a))$ , με  $a \leq 0$ , κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$ . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $M$  δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $M$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B$ . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου  $B$  τη χρονική στιγμή  $t_0$ , κατά την οποία το σημείο  $M$  έχει τετμημένη  $-1$ .

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, 1)$ , στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

**Μονάδες 7**

- Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left( \frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου  $x_0$  το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

**Μονάδες 6**

- Δ3.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + x = x_0$  για  $x \in (x_0, 1)$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ .

**Μονάδες 5**

- Δ4.** Αν  $x_0$  είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και  $\rho$  είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι  $f(x_0) > f(\rho)(f'(\rho)+1)$  για κάθε  $k \in (\rho, 1)$ .

**Μονάδες 7**