<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ</u>

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

24 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Θεωρία: Εύρος μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή της μεταβλητής.

Α2. **α)** $\to$ Σ, **β)** $\to$ Σ, **γ)** $\to$ Λ, **δ)** $\to$ Λ, **ε)** $\to$ Σ.

Α3.

α) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, με $x > 0$.

β) $(\eta\mu\, x)' = \sigma\upsilon\nu\, x$.

γ) Αν f συνεχής στο R με α ∈ R, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $x < 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x-4} = \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = x-3.$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}(x-3) = 4-3 = 1$.

Β2. Για $x > 4$ είναι:

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 = \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 = \sqrt{x}+2-3 = \sqrt{x}-1.$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}(\sqrt{x}-1) = \sqrt{4}-1 = 1$.

Β3. Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 4$, πρέπει και αρκεί:

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow a = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ηλικίες [,)	**Μέσο διαστήματος K_i**	**Συχνότητα v_i**	**$K_i \cdot v_i$**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i%**
[25,35)	30	7	210	7	17,5
[35,45)	40	12	480	19	30
[45,55)	50	15	750	34	37,5
[55,65)	60	6	360	40	15
Σύνολα		40	1800		100

Γ2. Από τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει: $\overline{x} = \dfrac{1800}{40} = 45$.

Γ3. Από τον ίδιο πίνακα προκύπτει ότι ηλικία τουλάχιστον 45 ετών έχουν: $15 + 6 = 21$ εργαζόμενοι.

Γ4. Από τη στήλη της σχετικής συχνότητας του πίνακα προκύπτει ότι ηλικία κάτω των 35 ετών έχουν το 17,5 % των εργαζομένων.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με:

$$f'(x) = \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right)' = 3x^2 - 12x + 9 =$$
$$= 3\left(x^2 - 4x + 3\right) = 3(x-1)\cdot(x-3),\ \ x \in R.$$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
f′	+	0	−	0	+	
f	↗		↘		↗	
		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

Δ2. Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1 = 1$, την τιμή $f(1) = 5$, ενώ έχει και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2 = 3$, την τιμή $f(3) = 1$.

Δ3. Είναι $\mathrm{I} = \int_1^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_1^3 = f(3) - f(1) = 1 - 5 = -4$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$\int_0^3 |g(x)|\,\mathrm{d}x$

Όμως επειδή είναι $g(x) = f'(x)$ γνωρίζουμε από τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$ ότι είναι

α) για $x \in [0, 1]$: $g(x) = f'(x) \geq 0$.

β) για $x \in [1, 3]$: $g(x) = f'(x) \leq 0$.

Έτσι είναι:

$$E = \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x + \int_1^3 |g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_0^1 - \left[f(x)\right]_1^3 =$$
$$= f(1) - f(0) - f(3) + f(1) = 5 - 1 - 1 + 5 = 8 \text{ τ.μ.}$$