

**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 17 Απριλίου 2016  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 45.  
A2. α) Λάθος  
β) Σωστό  
γ) Λάθος  
δ) Σωστό  
ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

B1.  $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta} = 3(-1, 2) - 2(0, -3) = (-3, 6) + (0, 6) = (-3, 12)$ .  
 $\gamma = (-3, 12)(-1, 2) + 4(-1, 2)(0, -3) = (3 + 24) + 4(0 - 6) = 27 - 24 = 3$ .

B2.  $AB \perp \vec{v} \Leftrightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_v = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \frac{-1}{\lambda_v} = \frac{-1}{\frac{12}{-3}} = \frac{1}{4}$

Άρα AB:  $y - 3 = \frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow 4y - 12 = x - 3 \Leftrightarrow x - 4y + 9 = 0$

και ΒΓ:  $y = 3x - 2$  αφού  $\gamma = \vec{v}\vec{a} + 4\vec{a}\vec{\beta} = 3$

Για την εύρεση της κορυφής Β λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 4y = -9 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 12x + 8 = -9 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow (-11x = -17) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{11} \\ y = \frac{29}{11} \end{cases}$$

**B3.** 
$$\begin{pmatrix} x_M = \lambda - 1 \\ y_M = 2\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_M + 1 \\ y_M = 2x_M + 2 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_M + 1 \\ 2x_M - y_M + 4 = 0 \end{pmatrix}$$
  
Άρα το Μ κινείται στην ευθεία  $2x - y + 4 = 0$

**B4.** Είναι  $ΑΓ : 2x - y + 4 = 0$ .

$$(B\Lambda) = d(B, ΑΓ) = \frac{\left| 2 \cdot \frac{17}{11} - \frac{29}{11} + 4 \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{49}{\sqrt{5}} = \frac{49\sqrt{5}}{11 \cdot 5} = \frac{49\sqrt{5}}{55}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

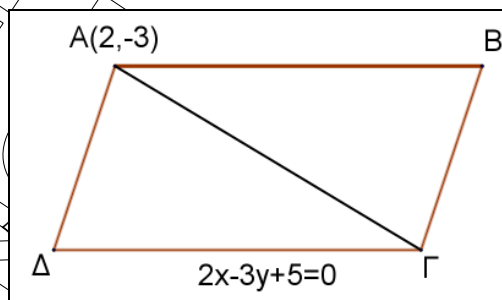
**Γ1.** Η  $(\epsilon) : x + y = 0$  δεν διέρχεται από το  $A(2, -3)$  αφού οι συντεταγμένες του δεν την επαληθεύουν και δεν είναι παράλληλη στην  $\Delta\Gamma$  γιατί  $\lambda_\epsilon = -1 \neq \lambda_{\Delta\Gamma}$ . Άρα είναι η  $(B\Gamma)$ .

Για το  $\Gamma$  λύνουμε το

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x + 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

δηλαδή  $\Gamma(-1, 1)$ , άρα

$$K\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{1-3}{2}\right) \text{ ή } K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$



**Γ2.** Για την  $ΑΒ : (\Delta\Gamma) \parallel (ΑΒ) \Leftrightarrow \lambda_{\Delta\Gamma} = \lambda_{ΑΒ} = \frac{2}{3}$  και διέρχεται από το  $A(2, -3)$

$$\text{άρα } y - (-3) = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 2x - 3y - 13 = 0.$$

Για το σημείο Β:

$$(\Sigma_2) \begin{cases} 2x - 3y - 13 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x = 13 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{13}{5} \end{cases} \text{ Άρα } B\left(\frac{13}{5}, -\frac{13}{5}\right)$$

$$\text{δηλ. } \overline{ΑΓ} = (-3, 4) \text{ και } \overline{ΑΒ} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$\text{δηλ. } (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| -\frac{6}{5} - \frac{12}{5} \right| = \frac{9}{5} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{άρα } (ΑΒΓΔ) = 2(ΑΒΓ) = \frac{18}{5} \text{ τ.μ.}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
**Β ΦΑΣΗ**

**E\_3.M12Θ(α)**

**Γ3.** Η παραβολή είναι της μορφής

$C: y^2 = 2px$  και διέρχεται από το σημείο  $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$  άρα:

$$1 = 2p \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 1 \quad \text{δηλαδή} \quad C: y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2.$$

**Γ4.** Η εφαπτόμενη στο σημείο  $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$  θα είναι:

$$(\eta): -y = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x + 2y + 1 = 0 \quad \text{με} \quad \lambda_\epsilon = -1$$

Η διχοτόμος της γωνίας  $EK\Theta$  είναι κάθετη στην παραπάνω εφαπτόμενη  
 $\delta \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\delta \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = 1$  (από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής)

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Η εξίσωση  $(\epsilon): ax + by = 0$  παριστάνει ευθεία, άρα  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$ .

Η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4ax - 4by = 0$  **(1)** είναι της μορφής  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$   
 με:  $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16a^2 + 16b^2 = 16(a^2 + b^2) > 0$  αφού  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$ .

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K(2a, 2b)$  και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{16(a^2 + b^2)}}{2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

**Δ2.**  $d(K, \epsilon) = \frac{|2a^2 + 2b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = \rho$  δηλαδή η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

**Δ3.** Αν  $K(x_K, y_K)$  τότε:  $\begin{cases} x_K = 2a \\ y_K = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x_K}{2} \\ b = \frac{y_K}{2} \end{cases}$ .

$$\text{Όμως } 3a^2 + 4b^2 = 3 \Leftrightarrow 3 \frac{x_K^2}{4} + 4 \frac{y_K^2}{4} = 3 \Leftrightarrow$$

$$3x_K^2 + 4y_K^2 = 12 \quad \text{ή} \quad \frac{x_K^2}{4} + \frac{y_K^2}{3} = 1$$

δηλαδή κινείται το  $K$  σε έλλειψη με  $a^2 = 4$  και  $b^2 = 3$ .

Άρα  $a = 2$  και  $b = \sqrt{3}$  οπότε θα είναι:

Μεγάλος άξονας:  $(AA') = 2a = 4$ , μικρός άξονας:  $(BB') = 2\sqrt{3}$  και

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Β ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2Θ(α)**

$$\gamma^2 = 4 - 3 = 1 \text{ δηλαδή εκκεντρότητα } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}.$$

**Δ4.** Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $N(x_1, y_1)$  είναι:  $3x_1 \cdot x + 4y_1 \cdot y = 12$ , η οποία διέρχεται από το  $Z(-2, 3)$  άρα:

$$-6x_1 + 12y_1 = 12 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 = -2 \quad (1) \text{ και το } N(x_1, y_1) \text{ είναι σημείο της έλλειψης,} \\ \text{οπότε: } 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \quad (2)$$

Για την εύρεση της  $N(x_1, y_1)$  λύνω το σύστημα των (1) και (2):

$$(\Sigma) \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2y_1 = -2 \\ 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2y_1 - 2 \\ 3 \cdot (2y_1 - 2)^2 + 4y_1^2 = 12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{12} (y_1^2 - 2y_1 + 1) + 4y_1^2 = \cancel{12} \Leftrightarrow 3y_1^2 - 6y_1 + 3 + y_1^2 - 3 = 0$$

$$4y_1^2 - 6y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \text{ ή } y_1 = \frac{3}{2} \text{ δηλαδή } N\left(1, \frac{3}{2}\right). \text{ Άρα η εξίσωση της} \\ \text{εφαπτόμενης}$$

$$\text{είναι } 3 \cdot 1 \cdot x + 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot y = 12 \Leftrightarrow 3x + 6y = 12 \Leftrightarrow x + 2y = 4 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{Είναι } A'(-2, 0), N\left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ οπότε το μέσο } M \text{ του } NA' \text{ είναι } M\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

Έχω και  $Z(-2, 3), O(0, 0)$

$$\text{Άρα } \overline{OM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ και } \overline{OZ} = (-2, 3).$$

$$\text{Οπότε } \det(\overline{OM}, \overline{OZ}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} + \frac{6}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

Δηλαδή  $\overline{OM} \parallel \overline{OZ}$  οπότε  $O, M, Z$  συνευθειακά.