ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 9

Α2. **α)** Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y που συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0;

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνάρτηση $1-1$;

Μονάδες 3

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $f^{-1}(f(x)) = x, x \in f(A)$.

Μονάδες 2

β) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε κατά ανάγκη $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$.

Μονάδες 2

γ) Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 2

δ) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 πάντοτε.

Μονάδες 2

ε) Η συνάρτηση $f(x)=a^x, a>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$$f'(x)=x\cdot a^{x-1}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-e^{3x}-x^3+1$.

Β1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Μονάδες 6

Β2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{f(x)}$.

Μονάδες 4

Β3. **α)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x}-x^3-2015}=1$, έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 3

Β4. Αν για τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to R$ ισχύει:

$e^{3g(x)}+g^3(x)=x^3\cdot e^6+(\ln x+2)^3$, για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι $g(x)=\ln x+2$ και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει

$f^2(x)+2xf(x)=1-\text{συν}^2x-x^2$, για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, με $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{6}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\etaμx-x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 8

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x)+1 & ,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-1 & ,x<0 \end{cases}$, με $\kappa\in R$.

Να βρείτε την παράμετρο κ ,ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\kappa=2$,να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g\left(x\right)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\kappa=2$,να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1–1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ και τον πραγματικό αριθμό x_0, έτσι ώστε:

- $g(x_0)=x_0+1$ και
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x_0+\nu h)-g(x_0)}{h}=\nu, \nu\in N^*-\{1\}$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα ρ.

Μονάδες 6

Δ2. $\lim\limits_{x\to\rho}\frac{f(x)+f'(x)-f(\rho)}{x-\rho}=e^{\rho}+1$, όπου ρ η ρίζα του Δ1 ερωτήματος.

Μονάδες 4

Δ3. **α)** Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $g'(x_0)=1$.

Μονάδες 5

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$, εφάπτεται στην C_g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$.

Μονάδες 5

Δ4. Η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $(fog)'(x_0)=e^{x_0+1}+x_0+1$.

Μονάδες 5