

**ΤΑΞΗ:** Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 4 Μαΐου 2014

**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης  $\epsilon$  του κύκλου  $c: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  είναι  $\epsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$

**Μονάδες 10**

**A.2.** Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**Μονάδες 5**

**A.3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ( $\Sigma$ ) ή λανθασμένες ( $\Lambda$ ):

**i.** Το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  με  $A, B, \Gamma$  τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, δίνεται από τον τύπο:  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{A\Gamma} \end{pmatrix} \right|$ .

**ii.** Αν για τις ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης τότε  $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ .

**iii.** Ένα παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία  $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  είναι το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (-B, A)$ .

**iv.** Στην παραβολή  $y^2 = 2px$  ο αριθμός  $p$  εκφράζει την απόσταση της εστίας  $E$  από τη διευθετούσα  $\delta$ .

**v.** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $c: \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$  έχουν εξίσωση

$$x = \pm \frac{\beta}{\alpha} y.$$

**Μονάδες 5x2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύει  $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}| = 4$ ,  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$  με  $\kappa \in \mathbb{R}$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  rad.

**B.1.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**Μονάδες 5**

**B.2.** Να υπολογίσετε το  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε  $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ .

**Μονάδες 7**

**B.3.** Για  $\kappa = -4$

i. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$ .

**Μονάδες 7**

ii. Να αποδείξετε ότι  $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\gamma} = -3\vec{\beta}$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι εξισώσεις

$$x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)x + (\lambda^2 + 1)y - 3\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0 \quad (2) \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

**Γ.1.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  κάθετες και να βρεθεί το σημείο τομής τους E.

**Μονάδες 6**

**Γ.2.** Να δείξετε ότι η (2) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  και ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας αυτής διέρχονται από το ίδιο σημείο Z.

**Μονάδες 7**

**Γ.3.** Αν E(1,0) το σημείο τομής των  $\epsilon_1, \epsilon_2$  και Z(2,-1) το σταθερό σημείο του ερωτήματος Γ.2. τότε

i. να βρείτε την εξίσωση και τη διευθετούσα της παραβολής c, η οποία έχει εστία E, κορυφή O(0,0) και άξονα συμμετρίας τον x'x,

**Μονάδες 6**

ii. να βρείτε την εξίσωση της χορδής της παραβολής c που έχει μέσο το σημείο Z.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται τα σημεία  $N(6\mu - 2, 6\lambda)$  με  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και ισχύει ότι  $\mu^2 + \lambda^2 = 1$ .

**Δ.1.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $N$  βρίσκονται στον κύκλο

$$c: (x + 2)^2 + y^2 = 36.$$

**Μονάδες 7**

**Δ.2.** Να βρείτε τις εφαπτόμενες του παραπάνω κύκλου  $c$  που διέρχονται από το σημείο  $\Delta(4, 8)$ .

**Μονάδες 8**

**Δ.3.** Αν τα σημεία  $A(4, 0)$  και  $E$  είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτόμενων με τον κύκλο  $c$ , να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $\Delta EKA$ , όπου  $K$  το κέντρο του κύκλου  $c$ .

**Μονάδες 5**

**Δ.4.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων  $M$  των κύκλων, που εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου  $c$  και διέρχονται από το σημείο  $\Sigma(2, 0)$ .

**Μονάδες 5**