

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελ. 251 σχολικού βιβλίου.

A2. Θεωρία σελ. 273 σχολικού βιβλίου.

A3. Θεωρία σελ. 150 σχολικού βιβλίου.

A4. α) $\rightarrow \Lambda$, β) $\rightarrow \Sigma$, γ) $\rightarrow \Sigma$, δ) $\rightarrow \Sigma$, ε) $\rightarrow \Lambda$

ΘΕΜΑ Β

B1. Αν θέσουμε $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, θα είναι $\bar{z} = x - yi$

και η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow [2(x^2 + y^2) - 4] + (2x - 2)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x^2 + y^2) - 2] + (x - 1)i = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2 = 0 \text{ και } x - 1 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 = 2 \text{ και } x = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y^2 = 1 \text{ και } x = 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \pm 1 \text{ και } x = 1.$$

Άρα οι λύσεις είναι $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$.

B2. Είναι

$$w = 3 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3 \cdot \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{39} = 3 \cdot \left[\frac{(1+i) \cdot (1-i)}{2} \right]^{39} = 3 \cdot \left[\frac{1+2i-1}{2} \right]^{39} =$$

$$= 3 \cdot (i)^{39} = 3i^{38} \cdot i = 3 \cdot (i^2)^{19} \cdot i =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot i = -3i.$$

B3. Η σχέση $|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$ γράφεται:

$$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = 5.$$

Αν $u = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $|x + yi - 3i| = 5 \Leftrightarrow$

$$|x + yi - 3i|^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 5^2.$$

Επομένως ο γ.τ. των μιγαδικών u είναι κύκλος με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως αποτέλεσμα αντίστοιχα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\text{Είναι } h'(x) = 1 - \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

$$\text{Επίσης, είναι } h''(x) = \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)' = -\frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Άρα η h είναι κοίλη στο \mathbb{R} .

Γ2. Η δοσμένη ανίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln[e^{h(2h'(x))}] < \ln\left(\frac{e}{e+1}\right) \quad (1)$$

Επειδή $h(1) = 1 - \ln(e+1) = \ln e - \ln(e+1) = \ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$ η (1) γράφεται

$$\ln[e^{h(2h'(x))}] < h(1) \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1).$$

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , προκύπτει ισοδύναμα ότι

$$2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \quad (2).$$

Επειδή η h είναι κοίλη στο \mathbb{R} , θα είναι και $h'(x)$ γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Έτσι από τη (2) προκύπτει ισοδύναμα $x > 0$.

Γ3. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right) \stackrel{*}{\leftarrow} \ln 1 = 0$$

* Διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{e^x + 1}\right) \stackrel{y \rightarrow 0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 - y) = \ln 1 = 0 \quad (\text{όπου έχουμε θέσει } y = \frac{1}{e^x + 1}).$$

Άρα η οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η $y = 0$.

Για την πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[1 - \frac{1}{x} \ln(e^x + 1)\right] = 1 - 0 = 1.$$

Διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = \ln 1 = 0$, (αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$) και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\text{Επίσης είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\ln(e^x + 1)] = -\ln 1 = 0.$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη της h στο $-\infty$ είναι η $y = x$.

Γ4. Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της φ .

Επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να μελετήσουμε την

$$g(x) = h(x) + \ln 2 = h(x) - h(0).$$

Όμως, $g'(x) = h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Επίσης $g(0) = h(0) - h(0) = 0$.

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x = 0$ θα είναι μοναδική για την g .
Για $x \geq 0$ θα είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0$.

Επομένως $\varphi(x) = e^x \cdot g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 [e^x h(x) + e^x \ln 2] dx = \int_0^1 [(e^x)' \cdot h(x)] dx + \ln 2 \int_0^1 e^x dx = \\ &= [e^x h(x)]_0^1 - \int_0^1 e^x h'(x) dx + \ln 2 \cdot [e^x]_0^1 = e \cdot h(1) - h(0) - \int_0^1 e^x \frac{1}{e^x + 1} dx + \ln 2(e - 1) = \\ &= e(1 - \ln(e + 1)) + \ln 2 - \int_0^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx + (e - 1) \ln 2 = \\ &= e - e \ln(e + 1) + \ln 2 - [\ln(e^x + 1)]_0^1 + (e - 1) \ln 2 = \\ &= e - e \ln(e + 1) + e \ln 2 - [\ln(e + 1) - \ln 2] = e - e \ln(e + 1) + e \ln 2 - \ln(e + 1) + \ln 2 = \\ &= e - \ln(e + 1) \cdot (e + 1) + \ln 2 \cdot (e + 1) = \\ &= e - (e + 1)[\ln(e + 1) - \ln 2] = e + (e + 1) \ln \frac{2}{e + 1} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f θα είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ αρκεί να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$.

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} \stackrel{**}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1.$$

* (Από τον κανόνα De l' Hospital).

** (Διότι e^x συνεχής).

Σημ. Το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ μπορεί να βρεθεί και χωρίς χρήση του κανόνα De l' Hospital, διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1, \text{ αφού το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} \text{ είναι το όριο του}$$

λόγου μεταβολής της συνάρτησης e^x , και άρα ισούται με την παράγωγο της e^x στη θέση 0, δηλ. 1.

$$\bullet \text{ Για } x \neq 0 \text{ είναι } f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{(e^x - 1)'x - (e^x - 1)(x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } x = 0 \text{ είναι } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

* (Από τον κανόνα De l' Hospital).

Θέτουμε $g(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = xe^x.$$

$$\text{Είναι } g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Επίσης } g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow xe^x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ αφού } e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών για την g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	○	+
g	↘		↗

ολικό
ελάχιστο = 0

Συμπεραίνουμε ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (έχει αποδειχθεί) αλλά και σε όλο το \mathbb{R}^* ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} .

Δ2. α) 1^{ος} τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \int_1^x f(u) du$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $K'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Για $x \in \mathbb{R}^*$ είναι $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

Με $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

Με $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 1 > 0$.

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισοδύναμα

$K'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η K είναι γν. αύξουσα στο \mathbb{R} .

Είναι $\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0 \Leftrightarrow K(2f'(x)) = K(1)$.

Επειδή K γν. αύξουσα θα είναι και 1-1.

Οπότε $2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$.

Όμως η f' είναι γν. αύξουσα διότι η f είναι κυρτή.

Άρα f' είναι 1-1 και έτσι προκύπτει $x = 0$ μοναδική ρίζα.

2^{ος} τρόπος :

Η $x_0 = 0$ είναι προφανής ρίζα αφού $\int_1^{2f'(0)} f(u) du = \int_1^{2\frac{1}{2}} f(u) du = \int_1^1 f(u) du = 0$

Θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική.

Έστω ότι η εξίσωση έχει κι άλλη ρίζα $x_0 \neq 0$. Επειδή f είναι κυρτή στο \mathbb{R} , η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , οπότε θα έχουμε :

- αν $x_0 > 0 \Leftrightarrow f'(x_0) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x_0) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x_0) > 1$ και επειδή για $x > 0$ είναι

$e^x > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$, θα είναι $f(x) > 0$. Τότε όμως θα είναι και

$$\int_1^{2f'(x_0)} f(u) du > 0 \Leftrightarrow 0 > 0, \text{ άτοπο.}$$

- αν $x_0 < 0 \Leftrightarrow f'(x_0) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x_0) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x_0) < 1$ και επειδή για $x < 0$ είναι

$e^x < e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, θα είναι $f(x) > 0$. Τότε όμως θα είναι και

$$\int_{2f'(x_0)}^1 f(u) du > 0 \Leftrightarrow -\int_1^{2f'(x_0)} f(u) du > 0 \Leftrightarrow \int_1^{2f'(x_0)} f(u) du < 0 \Leftrightarrow 0 < 0, \text{ επίσης} \\ \text{άτοπο.}$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x_0 = 0$.

- β)** Είναι $y(t) = f(x(t))$ (1). Η f έχει δείχθει στο προηγούμενο ερώτημα ότι είναι παραγωγίσιμη, ενώ και η $x(t)$ είναι παραγωγίσιμη, αφού δίνεται ότι έχει ρυθμό μεταβολής και μάλιστα θετικό, για κάθε $t \geq 0$. Έτσι η $y(t) = f(x(t))$ είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα σύνθεσης παραγωγισίμων συναρτήσεων. Με παραγωγή της (1) προκύπτει:

$$y'(t) = [f(x(t))]' \Leftrightarrow y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης $y(t)$ ισχύει:

$$x'(t_0) = 2 \cdot y'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 2 \cdot f'(x(t_0)) \cdot x'(t_0) \Leftrightarrow f'(x(t_0)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x(t_0)) = f'(0).$$

Όμως f' γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, οπότε $x(t_0) = 0$.

- α)** Αν υπάρχει t_0 ώστε $x(t_0) = 0$, τότε $y(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) = 1$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0, 1)$.

- β)** Αν δεν υπάρχει t_0 ώστε $x(t_0) = 0$, τότε δεν υπάρχει και σημείο M με την ιδιότητα $x'(t_0) = 2 \cdot y'(t_0)$.

*Σημ. Η ύπαρξη t_0 ώστε $x(t_0) = 0$ δεν είναι δεδομένη, καθώς μπορεί να βρεθεί συνάρτηση $x(t)$ με όλες τις τιμές της αρνητικές (άρα μη μηδενιζόμενη) και γνησίως αύξουσα. (Αντιπαράδειγμα : $x(t) = -a^t$, με $0 < a < 1$).

Δ3. Η συνάρτηση g για $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $x > 0$ γράφεται

$$g(x) = \left(x \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e \right)^2 \cdot (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 \cdot (x - 2)^2.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(e^x - e) \cdot e^x \cdot (x - 2)^2 + (e^x - e)^2 \cdot 2 \cdot (x - 2) = \\ &= 2 \cdot (e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot [e^x \cdot (x - 2) + e^x - e] = \\ &= 2 \cdot (e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot (e^x \cdot x - 2e^x + e^x - e) = \\ &= 2 \cdot (e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot (xe^x - e^x - e). \end{aligned}$$

- Θέτουμε $h(x) = x \cdot e^x - e^x - e$, $x \in (0, \infty)$. Η h είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $h'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Εξάλλου είναι $h(1) = -e < 0$, $h(2) = e \cdot (e - 1) > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και επειδή $h(1)/h(2) < 0$, προκύπτει από το Θ.

Boltzano ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $h(x_0) = 0$. Η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο $(1, 2)$. Έτσι, με $x > x_0 \Rightarrow h(x) > h(x_0) \Rightarrow h(x) > 0$, ενώ με $x < x_0 \Rightarrow h(x) < h(x_0) \Rightarrow h(x) < 0$.

- $e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$.
 $e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e^1 \Leftrightarrow x > 1$.
 $e^x - e < 0 \Leftrightarrow e^x < e^1 \Leftrightarrow x < 1$.

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών

x	0	1	x_0	2	$+\infty$	
$e^x - e$		-	○	+	+	
$x - 2$		-	-	-	○	+
$h(x)$		-	-	○	+	+
g'		-	○	+	-	+
g		↘	↗	↘	↗	
		Τ.Ε.	Τ.μ.	Τ.Ε.		

Προκύπτει ότι η g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μια θέση τοπικού μεγίστου.